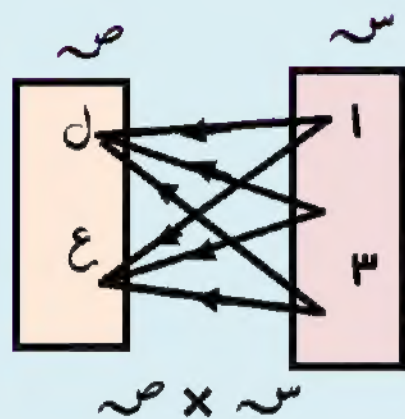


المتميز



في
الرياضيات

=

+

>

<

الصف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الأول

إعداد : أحمد الشنوري

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى

و وفقتى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

" المتميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين

و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه

تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة

مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات متنوعة و متدرجة

للتدريب على كيفية الحل لتناسب كل المستويات

و مرفق حلولها كاملة فى آخر الكتاب

متمنياً أن ينال رضاكم و ثقتم التى أعز بها

و الله لا يضيع أجر من أحسن عملاً

و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتوى

المحتويات

الوحدة الأولى : العلاقات و الدوال

* الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتى

* الدرس الثانى : العلاقات

* الدرس الثالث : الدالة (التطبيق)

* الدرس الرابع : دوال كثيرات الحدود

الوحدة الثانية : النسبة و التناسب و التغير الطردى و التغير العكسى

* الدرس الأول : النسبة

* الدرس الثانى : التناسب

* الدرس الثالث : التغير الطردى و التغير العكسى

الوحدة الثالثة : الإحصاء

* الدرس الأول : جمع البيانات

* الدرس الثانى : التشتت

الوحدة الرابعة : حساب المثلثات

* الدرس الأول : النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

* الدرس الثانى : النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

* الدرس الأول : البعد بين نقطتين

* الدرس الثانى : إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

* الدرس الثالث : ميل الخط المستقيم

* الدرس الرابع : معادلة الخط المستقيم بمعلومية

ميله و طول الجزء المقطوع

من محور الصادات

لأمانة العلمية
يسمح فقط بإعادة النشر
لنوع أى تعديل

الوحدة الأولى

العلاقات و الدوال

الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتي

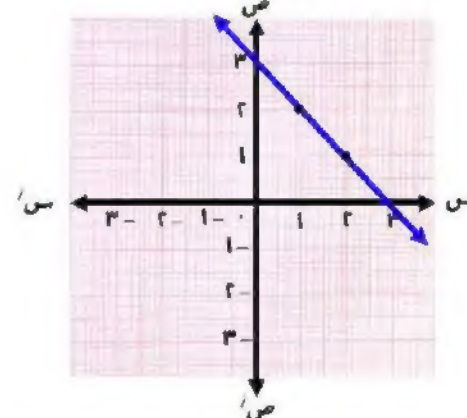
تمهيد : نعلم أن :

العلاقة : $P : S + B = C$ حيث : $P \neq 0$ ، $B \neq 0$.
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين S ، C ، و يمكن
إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (S, C) تحقق هذه العلاقة
فمثلاً : لدراسة العلاقة : $S + C = 3$

نوجد الأزواج المرتبة بوضع قيمة S وإيجاد قيمة C المناظرة
أو العكس و يمكن وضعها في جدول كما يلي :

S	٢	١	٠
C	١	٢	٣

و تمثل هذه الأزواج المرتبة
بيانياً في المستوى الإحداثي
المتعامد كما بالشكل المقابل :



ملاحظات :

- كل زوج مرتب يحدد نقطة واحدة في المستوى ، أي أن كل زوج مرتب يناظر نقطة واحدة و واحدة فقط في المستوى الإحداثي
- لاحظ الفرق بين $(1, 2)$ ، $(2, 1)$ و موضع النقطة التي يحددها كل منهما في المستوى الإحداثي و يكون :
 $(1, 2) \neq (2, 1)$

مما سبق نلاحظ :

(١) في الزوج المرتب (P, B) يسمى : P بالمسقط الأول ،

B بالمسقط الثاني

(٢) إذا كان : $P \neq B$ فإن : $(P, B) \neq (B, P)$

(٣) إذا كان : $(S, C) = (C, S)$ فإن : $S = C$

فمثلاً :

[١] إذا كان : $(S, C) = (1, 2)$ فإن : $S = 1$ ، $C = 2$

[٢] إذا كان : $(S, C) = (3 - S, 1 + S)$ فإن : $1 + S = C$ و منها : $S = 1$

و منها : $1 + S = 2$ و منها : $S = 1$

و منها : $3 - S = 1$ و منها : $S = 2$

(١) أوجد قيمة S ، C في كل مما يلي :

$$[١] (S, C) = (3, 4) \Rightarrow C = 4, S = 3$$

$$[٢] (S, C) = (1, 2) \Rightarrow C = 2, S = 1$$

$$[٣] (S, C) = (3, 4) \Rightarrow C = 4, S = 3$$

(٢) الحاصل الديكارتي للمجموعة S في المجموعة S يعرف كما يلي :
 $S \times S$ (يقرأ S ضرب S) هو مجموعة جميع الأزواج
 المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي إلى S ، و مسقطها الثاني ينتمي
 إلى S
 أي أن : $S \times S = \{ (p, b) : p \in S, b \in S \}$
 فمثلاً :

إذا كانت : $S = \{ 1, 2, 3 \}$ ، $T = \{ 1, 2 \}$ ، فإن
 $S \times T = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \}$

و يمكن الحصول على $S \times S$ من الجدول التالي :

المسقط الثاني		× أحمد الشنتوري	المسقط الأول
ع	ل		
(ع، ١)	(ل، ١)	١	
(ع، ٢)	(ل، ٢)	٢	
(ع، ٣)	(ل، ٣)	٣	

$$٣ = (س) \times (س)$$

$$٢ = (س) \times (س)$$

و يكون :

$$(س \times س) \times (س \times س) =$$

$$(س \times س) \times (س \times س)$$

$$٦ = ٣ \times ٢ = (س) \times (س)$$

(٣) $S = \{ 1, 2, 3 \}$ ، $T = \{ 1, 2 \}$ ، أوجد :

$$S \times S, S \times T, T \times S$$

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين :

إذا كانت : S, T مجموعتين منتهيتين و غير خاليتين فإن :
 (١) الحاصل الديكارتي للمجموعة S في المجموعة S يعرف كما يلي :
 $S \times S$ (يقرأ S ضرب S) هو مجموعة جميع الأزواج
 المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي إلى S ، و مسقطها الثاني ينتمي
 إلى S

أي أن : $S \times S = \{ (p, b) : p \in S, b \in S \}$
 فمثلاً :

إذا كانت : $S = \{ 1, 2, 3 \}$ ، $T = \{ 1, 2 \}$ ، فإن
 $S \times T = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \}$

و يمكن الحصول على $S \times S$ من الجدول التالي :

المسقط الثاني			×	المسقط الأول
٣	٢	١		
(٣، ١)	(٢، ١)	(١، ١)	ل	
(٣، ٢)	(٢، ٢)	(١، ٢)	ع	

إذا كانت : S ترمز

لعدد عناصر المجموعة

فإن : $٢ = (س) \times (س)$

$$٣ = (س) \times (س)$$

و يكون : $٦ = ٣ \times ٢ = (س) \times (س) = (س \times س) \times (س \times س)$

(٢) $S = \{ 1, 2, 3 \}$ ، $T = \{ 1, 2 \}$ ، أوجد :

$$S \times S, S \times T, T \times S$$

ملاحظات :

$$(1) \quad \sim \times \sim \neq \sim \times \sim \quad \text{حيث : } \sim \neq \sim$$

$$(2) \quad \sim (\sim \times \sim) = (\sim \times \sim) \sim = \sim (\sim \times \sim) = \sim (\sim \times \sim)$$

$$(3) \quad \text{إذا كان : } (\sim, \sim) \Rightarrow \sim \times \sim$$

$$\text{فإن : } \sim \Rightarrow \sim, \sim \Rightarrow \sim : \text{ بشرط أن : } \sim \not\Rightarrow \sim, \sim \not\Rightarrow \sim$$

(3) الحاصل الديكارتى للمجموعة \sim على نفسها يعرف كما يلي : $\sim \times \sim$ (يقرأ \sim ضرب \sim) ، (ويرمز له بالرمز : \sim) ، (ويقرأ \sim اثنتين) هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي كل من مسقطها الأول و الثانى ينتمى إلى \sim أى أن : $\sim \times \sim = \sim' = \{ (\sim, \sim) : \sim \in \sim, \sim \in \sim \}$ فمثلاً :إذا كانت : $\sim = \{1, 2\}$ فإن :

$$\sim' = \{ (\sim, \sim) : \sim \in \sim, \sim \in \sim \} = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$$

لاحظ أن :

$$\sim (\sim') = \sim' = [(\sim) \sim] = (\sim') \sim$$

$$(4) \quad \sim = \{1, 2, 3\} \text{ أوجد : } \sim' , \sim (\sim')$$

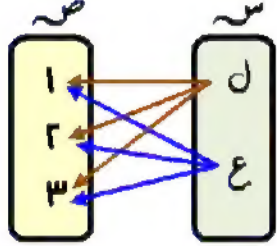
تمثيل حاصل الضرب الديكارتى :

إذا كانت : $\sim = \{1, 2, 3\}$ ، $\sim' = \{1, 2, 3\}$ فإن :

$$\sim \times \sim = \{ (\sim, \sim) : \sim \in \sim, \sim \in \sim \} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

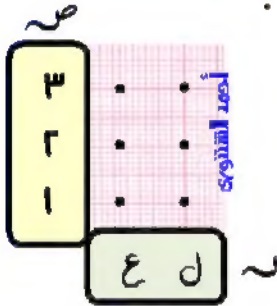
يمثل حاصل الضرب الديكارتى $\sim \times \sim$ كما يلي :

(1) المخطط السهمي :



يمثل كل زوج مرتب بسهم يخرج من مسقطه الأول و ينتهى عند مسقطه الثانى كما بالشكل المقابل :

(2) المخطط البيانى (الشبكة البيانى المتعامدة) :



يمثل كل زوج مرتب بإحدى نقاط تقاطع الخطوط الأفقية التى تمثل المسقط الأول و الخطوط الرأسية التى تمثل المسقط الثانى كما بالشكل المقابل :

ملاحظة :

يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى \sim' أيضاً بمخطط سهمى و بمخطط بيانى

فمثلاً :

إذا كانت : $\sim = \{1, 2\}$ فإن :

$$\sim' = \{ (\sim, \sim) : \sim \in \sim, \sim \in \sim \} = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$$

و يكون :

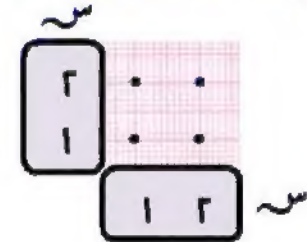
المخطط السهمي :



ملاحظة :

الدائرة حول العنصر 1 تمثل (1,1)

المخطط البياني (الشبكة التربيعية البيانية) :

(٥) إذا كانت : $\{1, 2\} = \text{س}$ ، $\{0, 1, 2, 3\} = \text{ص}$ أوجد : $\text{س} \times \text{ص}$ ، $\text{ص} \times \text{س}$ ، س^2 و مثل كل منها بمخطط سهمي(٦) إذا كانت : $\{1, 2, 3\} = \text{س}$ ، $\{0, 1, 2\} = \text{ص}$ أوجد :

$\text{ع} = \{1, 2\}$ أوجد : $\text{س} \times \text{ص}$ ، $\text{ص} \times \text{ع}$ ، ع^2
 و مثل كل منها بمخطط بياني ثم أوجد : $\text{ص} (\text{س} \times \text{ع})$ ،
 $\text{ص} (\text{س}^2)$ ، $\text{ص} (\text{ص}^2)$

أحمد الشنتوري

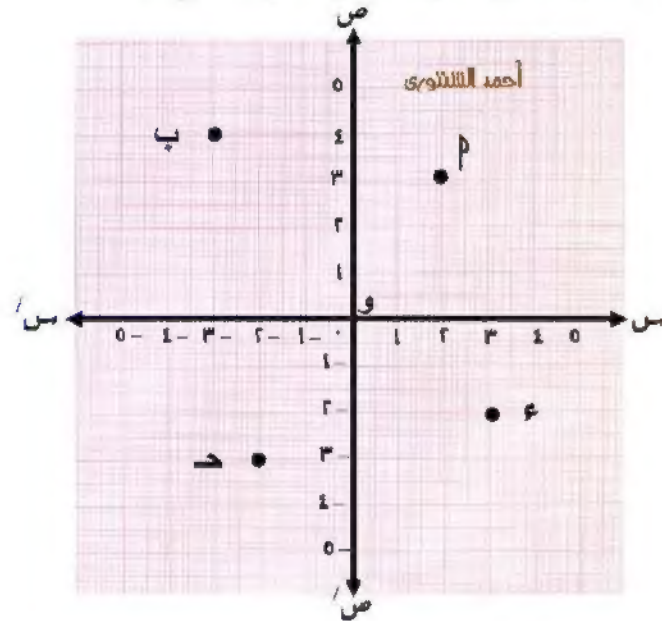
(٨) إذا كان : $\{ 2 \} = \text{ص} - \text{س}$ ، $\{ 3 \} = \text{ص} - \text{س}$ ، $\{ 4 \} = \text{ص} - \text{س}$ ،
 $\text{س} \cap \text{ص} = \{ 0 \}$ أوجد : س ، ص ،
 $(\text{س} \times \text{ص}) \cap (\text{ص} \times \text{س})$ ،

(٧) إذا كانت : $\{ 3 \} = \text{ص}$ ، $\{ 4 \} = \text{ص}$ ، $\{ 0 \} = \text{ص}$ ،
 $\text{ع} = \{ 0, 1 \}$ أوجد : $\text{س} \times (\text{ص} \cap \text{ع})$ ،
 $(\text{س} - \text{ص}) \times \text{ع}$ ، $(\text{ص} - \text{س}) \times (\text{ع} - \text{ص})$ ،

أحمد الشنتوري

(٩) إذا كان : $\text{س} \times \text{ص} = \{ (2, 6) , (2, 9) , (3, 6) \}$ ،
 $\{ (3, 9) , (0, 6) , (0, 9) \}$ ،
 أوجد كلاً من : س ، ص ، $\text{س} \times \text{ص}$

ثانياً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$:
 حيث : $\mathbb{V} \times \mathbb{V} = \{ (\mathbb{V} , \mathbb{V}) : \mathbb{V} \in \mathbb{V} , \mathbb{V} \in \mathbb{V} \}$
 تمثل الأعداد الصحيحة \mathbb{V} على كل من المستقيمين الأفقي و الرأسي
 حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (. ، .)
 فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في
 الحاصل الديكارتي $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ و تعرف هذه الشبكة بالمستوى
 الإحداثي $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ و تمثل كما بالشكل التالي :



فمثلاً :

- النقطة ا تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٢) ،
- النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٤ ، ٣) ،
- النقطة ج تمثل الزوج المرتب (٢ - ، ٣ -) ،
- النقطة د تمثل الزوج المرتب (٢ - ، ٣)

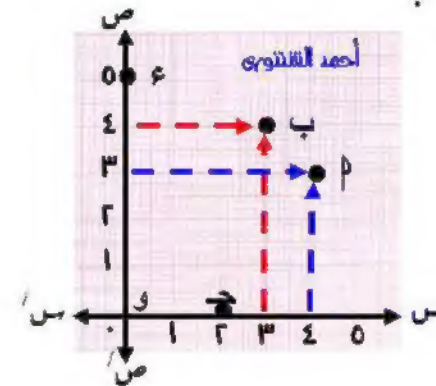
حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية و التمثيل البياني له :
 أولاً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتي $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$:

حيث : $\mathbb{P} \times \mathbb{P} = \{ (\mathbb{P} , \mathbb{P}) : \mathbb{P} \in \mathbb{P} , \mathbb{P} \in \mathbb{P} \}$

(١) نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما $\overrightarrow{س-س}$ أفقياً و الآخر $\overrightarrow{ص-ص}$ رأسياً
 و متقاطعين في النقطة (و)

(٢) نمثل الأعداد الطبيعية \mathbb{P} على كل من المستقيمين الأفقي و الرأسي
 بدءاً من النقطة (و) التي تمثل العدد صفر

(٣) نرسم مستقيمتين أفقية و أخرى رأسية من النقط التي تمثل الأعداد
 الطبيعية لنحصل على الشكل المقابل :



و تكون نقط التقاطع لمجموعة لهذه
 المستقيمتين ممثلة للشبكة البيانية
 المتعامدة $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$

ملاحظة :

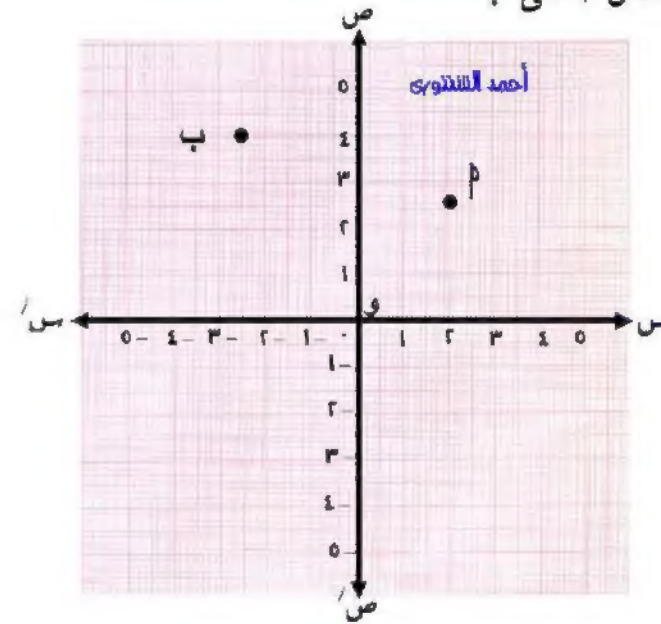
كل نقطة من نقط هذه الشبكة
 تمثل أحد الأزواج المرتبة في
 الحاصل الديكارتي $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$

فمثلاً :

- النقطة ا تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٤) ،
 - النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٤ ، ٣) ،
 - النقطة ج تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٢) ،
 - النقطة د تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٠)
- لاحظ أن : النقطة (و) تمثل الزوج المرتب (. ، .)

ثالثاً : تمثيل حاصل ضرب الديكارتى $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

حيث : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{ (س، ص) : س \in \mathbb{Q}, ص \in \mathbb{Q} \}$
 نمثل الأعداد الصحيحة \mathbb{Q} على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى
 حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (. ، .)
 فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى
 الحاصل الديكارتى $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
 و تعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثى $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
 و تمثل كما بالشكل التالى :



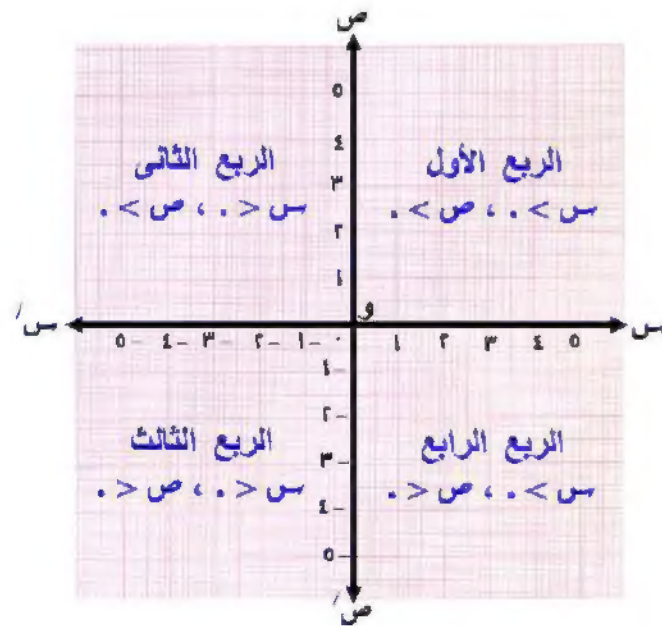
فمثلاً :

النقطة م تمثل الزوج المرتب $(2, 2)$ ،

النقطة ب تمثل الزوج المرتب $(-2, -2)$ ،

رابعاً : تمثيل حاصل ضرب الديكارتى $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

حيث : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (س، ص) : س \in \mathbb{R}, ص \in \mathbb{R} \}$
 نمثل الأعداد الصحيحة \mathbb{R} على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى
 حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (. ، .)
 فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى
 الحاصل الديكارتى $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 و تعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثى $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 يسمى المستقيم الأفقى $\overrightarrow{س}$ محور السينات ، المستقيم الرأسى
 $\overrightarrow{ص}$ محور الصادات فتقسم الشبكة إلى أربعة أقسام (أرباع)
 كما بالشكل التالى :



(١٠) على شبكة تربيعية للحصول الديكارتى $x \times y$ عين النقاط التالية
ثم أذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كل من هذه
النقاط :

أ (١ - ، ٣ $\frac{1}{4}$) ، ب (٠ ، ١ $\frac{1}{4}$ -) ، ج (٠ - ، ١ -) ، د (٠ ، ٣)
هـ (٢ ، ٠) ، ز (٢ - ، ٤ -) ، ح (٢ ، ٠) ، ط (٠ ، ٣)



أ (١ - ، ٣ $\frac{1}{4}$) تقع
ب (٠ ، ١ $\frac{1}{4}$ -) تقع
ج (٠ - ، ١ -) تقع
د (٠ ، ٣) تقع
هـ (٢ ، ٠) تقع
ز (٢ - ، ٤ -) تقع
ح (٢ ، ٠) تقع
ط (٠ ، ٣) تقع

(١١) على شبكة تربيعية للحصول الديكارتى $x \times y$ عين النقاط التالية
أ (٣ ، ٢) ، ب (٣ ، ١ -) ، ج (١ - ، ١ -) ، د (١ - ، ١ -)
ثم ارسم أ ب ، ب ج ، ج د ، د أ



و منها أكمل ما يلى :

[١] أ (٣ ، ٢) ب (٣ ، ١ -) ج (١ - ، ١ -) د (١ - ، ١ -) =

[٢] الشكل أ ب ج د يسمى

[٣] محيط الشكل أ ب ج د =

[٤] مساحة الشكل أ ب ج د =

أحمد الشنتوي

(١٢) إذا كانت : $s = [3, 2-]$ أوجد المنطقة التي تمثل
 $s \times s$ ، و بين أي من النقاط التالية تنتمي إلى الحاصل
 الديكارتي $s \times s$:

$$p(1, 2)$$

$$b(3, -1)$$

$$d(-1, 2)$$

$$e(-2, 0)$$

(١٣) إذا كانت : $p = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $b = \{2, 3, 4\}$ ،
 $d = \{1, 3, 4\}$ أوجد :

$$[1] (p \cap b) \times (b \cap d) \quad [2] (b - p) \times (p \cup d)$$

(١٤) إذا كانت : $s = \{1, 2, 3\}$ ، $v = \{1, 3, 4\}$ ،
 $e = \{0, 6\}$ أثبت أن :
 $e \times (v - s) = (e \times s) - (e \times v)$

أحمد الشنتوري

(١٥) إذا كانت : $s \supset v$ ، $p \geq 2$ أوجد قيمة p حيث :

$$s \times v = \{(3, p), (2, p), (4, p)\}$$

$$\{(3, 3), (2, 3), (4, 3)\}$$

(١٦) أكمل ما يلي :

[١] إذا كان : $٢ = (س)ص$ ، $٤ = (ص)ص$ فإن :

$$ص(ص \times ص) = \dots$$

[٢] إذا كان : $٩ = (س')ص$ فإن : $ص(س) = \dots$ [٣] إذا كان : $(س - ١١, ٨) = (٨, ص + ٣)$ فإن :

$$\sqrt{س + ٢ ص} = \dots$$

[٤] إذا كان : $س = \{ (١, ١), (٢, ١), (١, ٢) \}$ فإن : $س = \{ (٢, ٢) \}$ ،[٥] إذا كان : $س = \{ ٥, ٢ \}$ ، $ص = \{ ٣, ١ \}$ فإن :

$$\dots \ni (٥, ٣) ،$$

[٦] إذا كان : $س \times ص = \{ (٣, ٢), (٣, ١) \}$ فإن : $(١, ٢) \ni \dots$

$$\dots = \{ ٥ \} \times \{ ٢ \} \quad [٧]$$

$$\dots \times \dots = \{ (٤, ١) \} \quad [٨]$$

(١٧) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] النقطة $(٢ - , ٢)$ تقع

[في الربع الأول ، في الربع الثاني ، على محور السينات ، على محور الصادات]

[٢] النقطة تقع في الربع الثالث

[$(١, ١)$ ، $(١ - , ١)$ ، $(١ - , ١ -)$ ، $(١, ١ -)$][٣] إذا كانت النقطة : $(٢, ٣ - ٢)$ تقع على محور الصاداتفإن : $٢ = \dots$ [٣ ، $٣ -$ ، $٢ -$ ، صفر][٤] إذا كانت النقطة : $(٣ - س , س - ٥)$ تقع في الربعالثالث حيث : $س$ عدد صحيح فإن : $س = \dots$ [١ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$][٥] إذا كان : $(٥, ٣) \ni (٥, ٣) \times \{ ٦, ٣ \}$ فإن : $ك = \dots$ [٨ ، ٦ ، ٥ ، ٣][٦] إذا كان : $٩ = (س')ص$ ، $٦ = (ص)ص$ فإن : $ص(ص) = \dots$ [٢ ، ٣ ، ٩ ، ١٨][٧] إذا كان : $س = \{ ٢, ١ \}$ ، $ص = \{ ٤, ٣ \}$ فإن : $(٤, ٣) \ni \dots$ [$س'$ ، $ص'$ ، $س \times ص$ ، $ص \times س$]

أحمد الشنتوي

الدرس الثاني : العلاقات

تمهيد :

نعلم أن :

إذا كانت : $\mathbb{S} = \{0, 2, 3\}$ ، $\mathbb{V} = \{1, 2\}$ فإن :

$\mathbb{S} \times \mathbb{V} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

$\{(2, 0), (1, 0), (2, 2)\}$ ،

فإذا كانت : $\mathbb{E} = \{(1, 0), (2, 2)\}$

فإننا نلاحظ أن : $\mathbb{E} \subset \mathbb{S} \times \mathbb{V}$ و أن : $1 = 2 + 0$ ، $2 = 2 + 0$

و أن : بعض عناصر المجموعة \mathbb{S} مرتبط ببعض عناصر المجموعة \mathbb{V} بالتعبير : $1 = 2 + 0$ لكل $2 \in \mathbb{S}$ ، $0 \in \mathbb{V}$

و هذا التعبير يعين علاقة من المجموعة \mathbb{S} إلى المجموعة \mathbb{V} و الذي يرمز لها عادة بالرمز \mathbb{E} و يمكن تمثيل هذه العلاقة بمخطط سهمي و آخر بياني كما يلي :



مما سبق نستنتج :

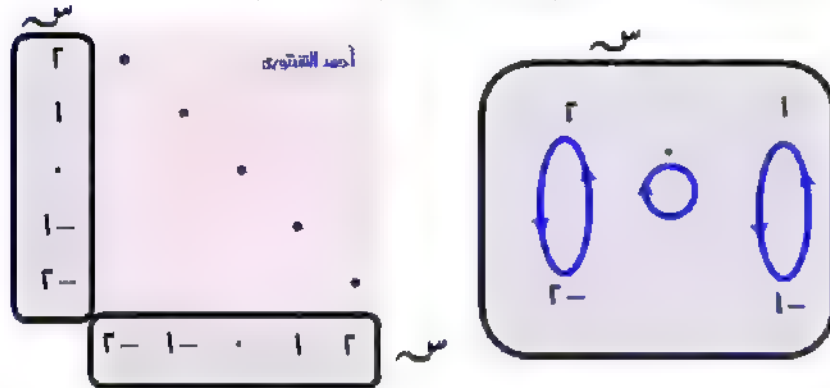
أحمد الشنتوي

- (١) العلاقة من مجموعة \mathbb{S} إلى مجموعة \mathbb{V} حيث \mathbb{S} ، \mathbb{V} مجموعتان غير خاليتان هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر \mathbb{S} ببعض أو كل عناصر \mathbb{V}
- (٢) بيان العلاقة من مجموعة \mathbb{S} إلى مجموعة \mathbb{V} هي مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول في كل منها ينتمي إلى من المجموعة \mathbb{S} و المسقط الثاني ينتمي إلى مجموعة \mathbb{V}
- فإذا كان : $(2, 0) \in \mathbb{E}$ بيان \mathbb{E} فإن : $2 \in \mathbb{S}$ ، $0 \in \mathbb{V}$ و يمكن التعبير عنها بالشكل $2 \mathbb{E} 0$
- أما إذا كان : $(2, 0) \notin \mathbb{E}$ بيان \mathbb{E} فإن : $2 \mathbb{E} 0$
- (٣) إذا كانت : \mathbb{E} علاقة من مجموعة \mathbb{S} إلى مجموعة \mathbb{V} فإن : $\mathbb{E} \subset \mathbb{S} \times \mathbb{V}$
- (٤) أي مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي $\mathbb{S} \times \mathbb{V}$ يمكن أن تعبر عن علاقة من مجموعة \mathbb{S} إلى مجموعة \mathbb{V}
- (٥) إذا كانت : \mathbb{E} علاقة من مجموعة \mathbb{S} إلى مجموعة \mathbb{V} فإن : \mathbb{E} تسمى علاقة على \mathbb{S} و تكون : $\mathbb{E} \subset \mathbb{S} \times \mathbb{S}$
- (٦) يمكن تمثيل بيان \mathbb{E} بمخطط سهمي أو مخطط بياني
- (٧) لأي $(2, 0) \in \mathbb{E}$ بيان \mathbb{E} فإن : 2 هي صورة 0
- (٨) العلاقة \mathbb{E} يمكن أن تكون :
 - [١] كلمة مثل : ضعف أي أن : 2 ضعف 1 أو 1 ضعف 2
 - [٢] جملة لفظية مثل : 2 معكوس ضربي للعدد 1
 - [٣] جملة رياضية مثل : $2 = 1 + 1$
 - و هكذا

$$\{ (.,.), (1,1-), (2,2-) \} = \mathcal{C} \therefore$$

$$\{ (2-, 2), (1-, 1),$$

و تمثل بمخطط سهمي و آخر بياني كما يلي :



$$(I) \text{ إذا كانت : } \mathcal{S} = \{ 3, 2, 1 \}, \mathcal{V} = \{ 7, 6, 0, 4 \}$$

و كانت ع علاقة من \mathcal{S} إلى \mathcal{V} حيث $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$ ب تعني أن :

$$" \mathcal{A} = \mathcal{P} + \mathcal{P} " \text{ لكل } \mathcal{P} \in \mathcal{S}, \mathcal{P} \in \mathcal{V} \text{ أكتب بيان ع}$$

و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

فمثلاً :

$$[I] \text{ إذا كانت : } \mathcal{S} = \{ 3, 2, 1 \}, \mathcal{V} = \{ 7, 0, 4, 3 \}$$

و كانت ع علاقة من \mathcal{S} إلى \mathcal{V} حيث $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$ ب تعني أن :

$$" \mathcal{P} + \mathcal{P} = 1 " \text{ لكل } \mathcal{P} \in \mathcal{S}, \mathcal{P} \in \mathcal{V} \text{ فإن :}$$

لإيجاد بيان ع نلاحظ :

$$\text{عندما : } 1 = \mathcal{P} \therefore \mathcal{P} = 1 + 1 \times 2 = 3$$

$$\text{عندما : } 2 = \mathcal{P} \therefore \mathcal{P} = 1 + 2 \times 2 = 5$$

$$\text{عندما : } 3 = \mathcal{P} \therefore \mathcal{P} = 1 + 3 \times 2 = 7$$

$$\therefore \mathcal{C} = \{ (7, 3), (0, 2), (3, 1) \}$$

و تمثل بمخطط سهمي و آخر بياني كما يلي :



$$[II] \text{ إذا كانت : } \mathcal{S} = \{ 2-, 1-, ., 1, 2 \} \text{ و كانت ع علاقة}$$

على \mathcal{S} حيث $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$ ب تعني أن : " العدد \mathcal{P} معكوس جمعي للعدد ب "

$$\text{لكل } \mathcal{P} \in \mathcal{S}, \mathcal{P} \in \mathcal{V} \text{ فإن : لإيجاد بيان ع نلاحظ :}$$

(٢) إذا كانت : $s = \{3, 7, 9\}$ ، $v = \{2, 3, 4, 5\}$
و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
" $p = 2 - b$ " لكل $p \in s$ ، $b \in v$ أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

(٤) إذا كانت : $s = \{1, 2, 3\}$ ، $v = \{2, 4, 6\}$
و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
" $p \geq b$ " لكل $p \in s$ ، $b \in v$ أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

أحمد الشنتوري

(٣) إذا كانت : $s = \{1, 2, 3\}$ ، $v = \{7, 8, 10\}$
و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
" $p + b =$ عدد فردي " لكل $p \in s$ ، $b \in v$ أكتب
بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

(٥) إذا كانت : $s = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ، $v = \{0, 1, 4, 6, 9\}$
و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
" $p = b^2$ " لكل $p \in s$ ، $b \in v$ أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

(٦) إذا كانت : $s = \{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 2, 3 \}$ وكانت E علاقة

على s حيث $M \in E$ ب تعني أن : " العدد M هو المعكوس الضربي للعدد b " لكل M ، $b \in s \Rightarrow$ أكتب بيان E و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

(٨) إذا كانت : $s = \{ 2, 3, 4, 6, 9 \}$ أكتب بيان كل من

العلاقات التالية على s :

[١] E حيث $M \in E$ ب تعني : $M = \frac{1}{b}$ ، و مثلها بمخطط سهمي

[٢] E حيث $M \in E$ ب تعني : $M = \text{نصف } b$ ، و مثلها بمخطط سهمي

[٣] E حيث $M \in E$ ب تعني : $M = \text{ضعف } b$ ، و مثلها بمخطط سهمي

[٤] E حيث $M \in E$ ب تعني : $M = \text{تقسم } b$ و مثلها بمخطط بياني

ملاحظة :

M تقسم b تعني أن : M عامل من عوامل b أو : b تقبل القسمة على M

أحمد الشنتوري

(٧) إذا كانت : $s = \{ 1, 2, 4, 6, 10 \}$ وكانت E علاقة

على s حيث $M \in E$ ب تعني أن : " مضاعف b " لكل M ، $b \in s \Rightarrow$ أكتب بيان E و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني

(١٢) إذا كانت جميع العلاقات التالية معرفة على صـ حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة و كان م، ب \rightarrow صـ أكمل ما يلي بأحد الرمزين \supset أو \nexists :

[١] (٤ ، ٢) بيان ع_١ حيث م ع_١ ب تعنى : $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ب

[٢] (٥ ، - $\frac{1}{5}$) بيان ع_٢ حيث م ع_٢ ب تعنى :

العدد م معكوس ضربى للعدد ب

[٣] (٣٥ ، ٢٥) بيان ع_٣ حيث م ع_٣ ب تعنى :

م، ب لهما نفس رقم الآحاد

[٤] (٦ ، ٣) بيان ع_٤ حيث م ع_٤ ب تعنى :

م تقبل القسمة على ب

[٥] (٥ ، ٥) بيان ع_٥ حيث م ع_٥ ب تعنى :

م عامل من عوامل ب

[٦] (٧ ، ٣) بيان ع_٦ حيث م ع_٦ ب تعنى :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ زوجى

[٧] (٤ ، ٢) بيان ع_٧ حيث م ع_٧ ب تعنى :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ عدد أولى

(٩) إذا كانت : سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، صـ = { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، لـ = { ٤ ، ٥ ، ٧ } أكمل مكان النقط بالمجموعة المناسبة :

[١] ع_١ = { (٢ ، ٣) ، (٦ ، ٥) } علاقة من إلى

[٢] ع_٢ = { (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٥) } علاقة من إلى

[٣] ع_٣ = { (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٢) } علاقة من إلى

[٤] ع_٤ = { (٥ ، ٨) ، (٦ ، ٢) } علاقة من إلى

(١٠) إذا كانت : ع علاقة على م حيث م مجموعة الأعداد النسبية

و كانت م ع ب تعنى أن " $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ب " لكل م، ب \supset م

أكمل الأزواج المرتبة التالية بحيث تنتمى إلى ع :

[١] (٦ ،) [٢] (١٠ ،)

[٣] ($\frac{2}{3}$ ،) [٤] ($\frac{4}{5}$ ،)

(١١) إذا كانت : ع علاقة على ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية

و كانت م ع ب تعنى أن " $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ب " لكل م، ب \supset ط

أوجد قيم م إذا كان :

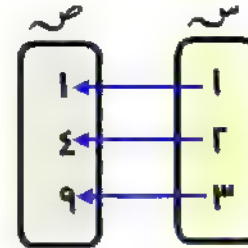
[١] م ع ٤ فإن : م = [٢] (٣ ، ٣) \supset ع فإن : م =

[٣] $\frac{1}{2}$ م ع ٦ فإن : م = [٤] (٢ ، ٢) \supset ع فإن : م =

أحمد الشنتوري

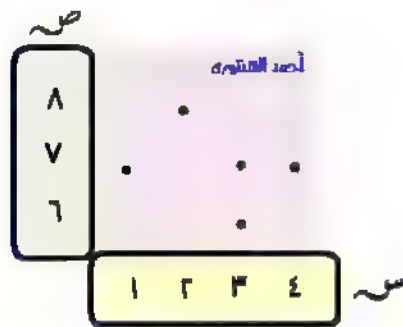
(١٣) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع
من سـ إلى صـ
أكتب بيان ع



(١٥) الشكل المقابل :

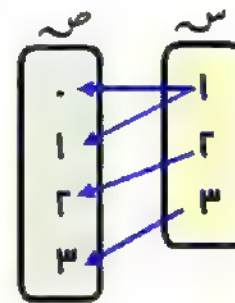
يمثل مخططاً بيانياً للعلاقة ع
من سـ إلى صـ
أكتب بيان ع



أحمد الشنتوري

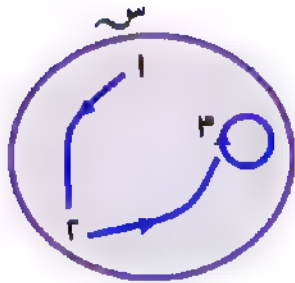
(١٤) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع
من سـ إلى صـ
أكتب بيان ع



(١٦) الشكل المقابل :

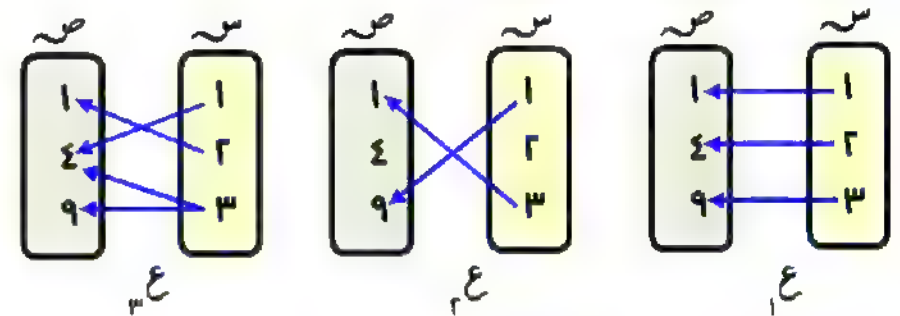
يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع
المعرفة على سـ
أكتب بيان ع



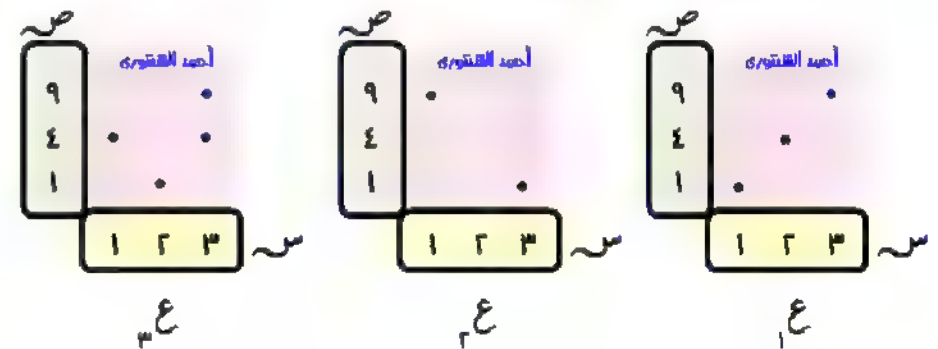
الدرس الثالث : الدالة (التطبيق)

تمهيد :

الأشكال التالية تمثل كلاً من المخطط السهمي و المخطط البياني لثلاث علاقات من S إلى V
 أولاً : المخطط السهمي لكل علاقة :



ثانياً : المخطط البياني لكل علاقة :



نلاحظ أن :

$$[1] \quad E_1 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$$

و أن : العلاقة E_1 تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر

أحمد الشنتوي

S مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر V
 حيث : خرج سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر S
 إلى عنصر من عناصر V
 و كل عنصر من عناصر S ظهر كمسقط أول مرة واحدة
 فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة
 و تظهر نقطة واحدة فقط على الخط الرأسى لكل عنصر من
 عناصر S في المخطط البياني الممثل للعلاقة
 $[2] \quad E_2 = \{ (1, 3), (2, 1), (3, 2) \}$

و أن : العلاقة E_2 لم تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر
 S مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر V
 حيث : لم يخرج سهم من العنصر $2 \in S$ إلى أى عنصر
 من عناصر V

و لم يظهر العنصر $2 \in V$ كمسقط أول فى أى من الأزواج
 المرتبة المحددة لبيان العلاقة
 و لا توجد أى نقطة على الخط الرأسى للعنصر $2 \in V$
 فى المخطط البياني الممثل للعلاقة

$$[3] \quad E_3 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 3) \}$$

و أن : العلاقة E_3 لم تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر
 S مرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر V
 حيث : خرج سهمان من العنصر $3 \in S$ إلى أى كل من
 $1 \in V$ و $2 \in V$

و ظهر العنصر $3 \in V$ كمسقط أول مرتين فى الزوجين

(الأقل) من عناصر S يخرج منه أكثر من سهم (أو لا يخرج منه أي سهم)
 (٣) من المخطط البياني للعلاقة : يوجد أكثر من نقطة على أحد الخطوط الرأسية للمخطط البياني للعلاقة أو (أحد الخطوط الرأسية للمخطط البياني لا تقع عليه أي نقطة)

(١) إذا كانت : $S = \{0, 2, 3\}$ ، $V = \{1, 0, 2\}$
 أذكر أي العلاقات التالية دالة من S إلى V ولماذا ؟
 [١] $E_1 = \{(0, 2), (2, 3)\}$

[٢] $E_2 = \{(1, 0), (1, 2), (0, 3), (2, 3)\}$

[٣] $E_3 = \{(1, 0), (2, 2), (2, 3)\}$

المرتبتين (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٩)

و توجد نقطتين على أحد الخطوط الرأسية للعنصر $3 \in S$

هما (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٩)

مما سبق نستنتج التعريف التالي :

يقال للعلاقة من المجموعة S إلى المجموعة V أنها دالة إذا كان :
 كل عنصر من عناصر المجموعة S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

ملاحظات

[١] تمثل العلاقة من S إلى V دالة في الحالات التالية :

(١) في بيان الدالة كل عنصر من عناصر المجموعة S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة
 (٢) في المخطط السهمي للعلاقة يخرج سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر S إلى أحد عناصر V

(٣) في المخطط البياني للعلاقة كل خط رأسي تظهر عليه نقطة واحدة فقط من النقط التي تنتمي للعلاقة

[٢] كل دالة علاقة بينما كل علاقة ليس بالضرورة أن تكون دالة

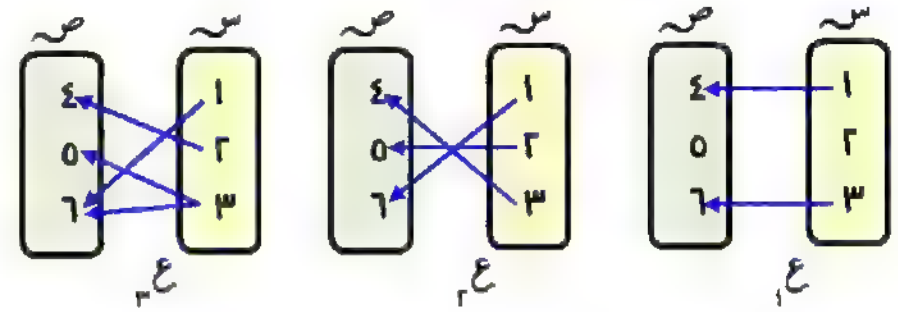
[٣] لا تمثل العلاقة من S إلى V دالة في الحالات التالية :

(١) من بيان العلاقة : إذا وجد عنصر (واحد على الأقل) من عناصر S لا يظهر (أو يظهر أكثر من مرة) كمسقط أول في أي من الأزواج المرتبة للعلاقة

(٢) من المخطط السهمي للعلاقة : إذا كان هناك عنصر (واحد على

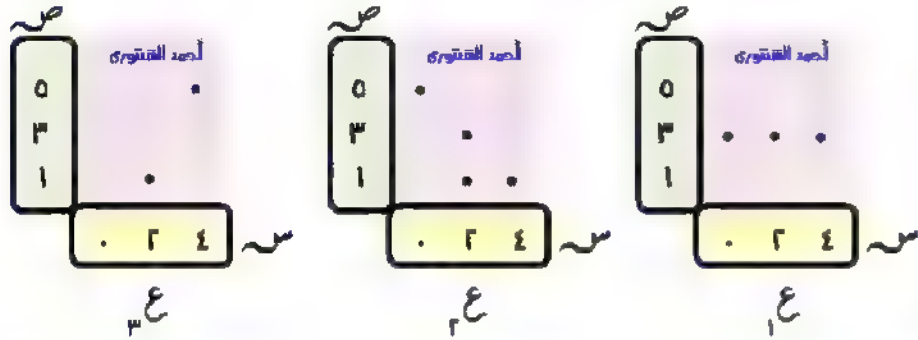
أحمد الشنتوري

(٢) أي من العلاقات التالية تمثل د من س إلى ص ؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة أوجد المدى



أحمد الشنتوري

(٣) أي من العلاقات التالية تمثل د من س إلى ص ؟ وإذا كانت العلاقة تمثل دالة أوجد المدى



التعبير الرمزي للدالة :

يرمز للدالة بأحد الرموز : d أو f أو g أو h أو
والدالة d من المجموعة S إلى المجموعة S تكتب رياضياً
 $d: S \rightarrow S$ وتقرأ : دالة من S إلى S

ملاحظات :

١ إذا كانت : دالة من المجموعة S إلى نفسها

فإنه يقال أن : دالة على S

٢ إذا كان : الزوج المرتب (s, s) ينتمي لبيان الدالة

فإن : العنصر s يسمى صورة العنصر s بالدالة ،

و يعبر عن ذلك بإحدى الصورتين :

١ $d: s \rightarrow s$ و تقرأ : الدالة d ترسم s إلى s

٢ $d(s) = s$ و تقرأ : دالة حيث : $d(s) = s$

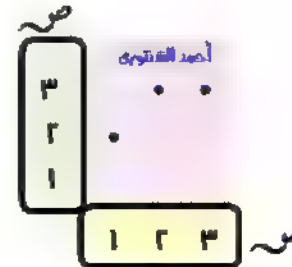
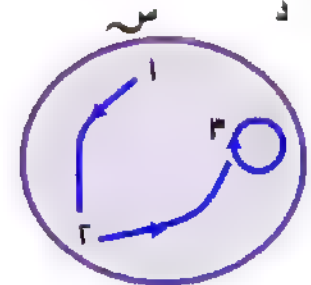
فمثلاً :

إذا كانت : $S = \{1, 2, 3\}$ و كان : $d(1) = 2$ ،

$d(2) = 3$ ، $d(3) = 1$ فإن :

بيان $d = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

و الشكلان التاليان يوضحان كل من المخطط السهمي و المخطط البياني للدالة d



المجال و المقابل و المدى :

إذا كانت : d من المجموعة S إلى المجموعة S

أي أن $(d: S \rightarrow S)$ فإن :

١ المجموعة S تسمى مجال الدالة

٢ المجموعة S تسمى المجال المقابل للدالة

٣ مجموعة صور عناصر مجموعة المجال S بالدالة d

تسمى مدى الدالة

٤ المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة

فمثلاً :

١ إذا كانت : $S = \{1, 2, 3\}$ ، $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

، بيان $d = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 4)\}$ فإن :

مجال الدالة d هو : $S = \{1, 2, 3\}$

المجال المقابل للدالة d هو : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

مدى الدالة d هو : $\{1, 2, 3\}$

لاحظ المخطط السهمي و المخطط البياني للدالة d :



(٤) إذا كانت : $s = \{ 3, 0, 2, 1 \}$ و كان : $d(3) = 3$ ،

$d(2) = 0$ ، $d(0) = 2$ ، $d(1) = 0$ أكتب بيان د

و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني ثم أكتب المدى

(٢) إذا كانت : $s = \{ 0, 2, 3, 1 \}$ ،

$s = \{ 0, 2, 3, 1 \}$ و كانت : $d : s \leftarrow s$

حيث : $d(s) = 1 - s$ فإن :

$d(1) = 1 - 1 = 0$ ، $d(2) = 1 - 2 = -1$ ، $d(3) = 1 - 3 = -2$ ،

$d(0) = 1 - 0 = 1$ ، $d(3) = 3 - 1 = 2$ ، $d(2) = 2 - 1 = 1$ ،

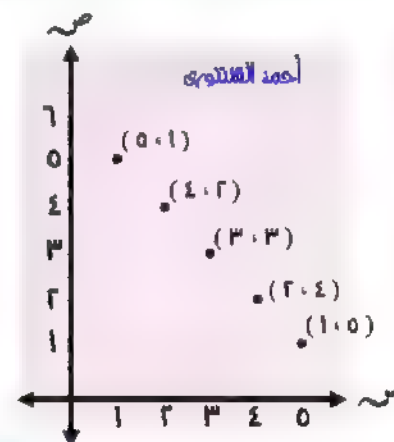
$d(0) = 0 - 1 = -1$ ، و يكون :

بيان الدالة $d = \{ (0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 2) \}$

$\{ (1, 0), (2, 1), (3, 2) \}$ ،

مدى الدالة $= \{ 0, 1, 2, 3 \}$ ،

المخطط البياني لها كما بالشكل التالي :



لأمانة العلمية
يرجى عدم حذف أسمى نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أي تعديل

(٦) إذا كانت : $s = \{1, 2, 3\}$ ، $v = \{0, 1, 6, 7, 8\}$
 و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
 " $p + b =$ عدد أولي " لكل $p \in s$ ، $b \in v \Rightarrow$ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني . هل ع دالة و لماذا ؟
 و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٧) إذا كانت : $s = \{1, 2, 7\}$ ، $v = \{0, 1, 3, 5, 6\}$
 و كانت ع علاقة من s إلى v حيث p ع b تعني أن :
 " $p + b > 8$ " لكل $p \in s$ ، $b \in v \Rightarrow$ أكتب بيان ع
 و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني . هل ع دالة و لماذا ؟
 و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٥) إذا كانت : $s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،
 $v = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و كانت د : $s \leftarrow v$
 حيث : $d(s) = s + 2$ أوجد :
 [١] بيان الدالة د
 [٢] مدى الدالة د
 [٣] ارسم مخطط بياني للدالة د

أحمد الشنتوري

(٨) إذا كانت : $s = \{ 1, 2, 4, 6, 10 \}$ و كانت ع علاقة على s حيث m ع p ب تعني أن : " m مضاعف p " لكل $m, p \in s \Rightarrow s$ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٩) إذا كانت : $s = \{ s : s \geq 1, s \geq 0 \}$ و كانت ع علاقة على s حيث m ع p ب تعني أن : " $m + p = v$ " لكل $m, p \in s \Rightarrow s$ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

أحمد الشنتوي

(١٠) إذا كانت : $s = \{ 1, 2, 3, 6, 11 \}$ و كانت ع علاقة على s حيث m ع p ب تعني أن : " $m + p =$ عدد فردي " لكل $m, p \in s \Rightarrow s$ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(١١) إذا كانت : $s = \{ 2, 5, 8 \}$ ، $v = \{ 10, 16, 24, 30 \}$ و كانت ع علاقة من s إلى v حيث m ع p ب تعني أن : " m عامل من عوامل p " لكل $m \in s \Rightarrow v$ ، $p \in v \Rightarrow s$ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي و آخر بياني . هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(١٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : $\sim = \{ ٧ , ٥ , ٣ \}$ وكانت \mathcal{E} علاقة على \sim

فإن : العلاقة التي تمثل دالة من بين العلاقات التالية هي

$$[\mathcal{E} = \{ (٧ , ٣) , (٣ , ٥) , (٥ , ٣) \}]$$

$$[\mathcal{E} = \{ (٧ , ٥) , (٥ , ٥) , (٥ , ٣) \}]$$

$$[\mathcal{E} = \{ (٦ , ٧) , (٥ , ٣) , (٣ , ٣) \}]$$

$$[\mathcal{E} = \{ (٧ , ٥) , (٥ , ٣) \}]$$

[٢] إذا كانت : $\sim = \{ ٨ , ٥ , ٢ \}$ ، $\sim = \{ ٥ , ٣ \}$

و كانت \mathcal{E} دالة من \sim إلى \sim حيث :

$$\mathcal{E} = \{ (٣ , ٢) , (٣ , ٥) , (٣ , ٥) \}$$

فإن : $\sim =$

$$[٢ , ٣ , ٥ , ٨]$$

[٣] إذا كانت \mathcal{E} دالة حيث :

$$\mathcal{E} = \{ (٣ , ٩) , (٦ , ٥) , (٣ , ٤) \}$$

فإن : مدى الدالة \mathcal{E} هو

$$[\{ ٩ , ٥ , ٤ \} , \{ ٩ , ٦ , ٥ , ٤ , ٣ \}]$$

$$[\{ ٦ , ٣ \} , \{ ٩ , ٦ , ٣ \}]$$

[٤] إذا كانت $(١٣ , \mathcal{M}) \ni$ بيان الدالة \mathcal{D} حيث :

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{ ٣ , \mathcal{S} + ٤ \} \text{ فإن } \mathcal{M} = \dots$$

$$[٣ - , ٣ , ٦ - , ٦]$$

[٥] إذا كانت $(٢ , \mathcal{P}) \ni$ بيان الدالة \mathcal{D} حيث :

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{ ٣ , \mathcal{S} - ٦ \} \text{ فإن } \mathcal{P} = \dots$$

$$[\text{صفر} , ٢ , ٧ , ٩]$$

[٦] إذا كانت $(٢ - , \mathcal{P}) \ni$ بيان الدالة \mathcal{D} حيث :

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{ \mathcal{S} + ٨ \} \text{ فإن } \mathcal{P} = \dots$$

$$[٧ - , ٧ , ٦ - , ٦]$$

[٧] مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى

[القاعدة ، المجال ، المدى ، المجال المقابل]

[٨] إذا كانت \mathcal{D} دالة من المجموعة \sim إلى المجموعة \sim

فإن : مجال الدالة \mathcal{D} هو

$$[\sim , \sim , \sim \times \sim , \sim \times \sim]$$

[٩] إذا كانت \mathcal{D} دالة من المجموعة \sim إلى المجموعة \sim

فإن : المجال المقابل للدالة \mathcal{D} هو

$$[\sim , \sim , \sim \times \sim , \sim \times \sim]$$

[١٠] إذا كانت : $\sim = \{ ٥ , ٣ , ١ \}$ وكانت $\mathcal{D} : \sim \rightarrow \mathcal{H}$

حيث \mathcal{H} مجموعة الأعداد الحقيقية ، $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = ٢ + \mathcal{S}$

فإن : مدى \mathcal{D} =

$$[\{ ٢ , ٤ , ٦ , ٨ , ٩ \} , \{ ٣ , ٧ , ١١ \}]$$

$$[\{ ١ , ٣ , ٥ \} , \{ ٧ , ١١ \}]$$

أحمد الشنتوي

الدرس الرابع : دوال كثيرات الحدود

تمهيد :

بملاحظة الدوال التالية حيث : \mathcal{H} مجموعة الأعداد الحقيقية

$$د_1 : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} , د_1(س) = ٣$$

$$د_2 : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} , د_2(س) = ١ + ٤س$$

$$د_3 : \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} , د_3(س) = ٥ + ٢س - ٣س^٢$$

نجد أن :

[١] المجال و المجال المقابل لكل منها هو \mathcal{H}

[٢] قاعدة الدالة (صورة س) هي حد جبرى أو مقدار جبرى

[٣] قوة (أس) المتغير س فى أى من الحدود هو عدد طبيعى
لذلك فإن أى من هذه الدوال تسمى : دالة كثيرة حدود

تعريف :

الدالة د : $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}$ حيث :

$$د(س) = ٠ + ١س + ٢س^٢ + ٣س^٣ + \dots + م٢س^٢ + م١س + م٠س^٠$$

حيث : $٠, ١, ٢, \dots, م$ ، $٠ \in \mathcal{H}$ ، $١ \in \mathcal{H}$ ، $٢ \in \mathcal{H}$ ، $٣ \in \mathcal{H}$ ، \dots ، $م \in \mathcal{H}$ ، $٠ \neq ١$

تسمى كثيرة حدود من الدرجة م

و تكون درجة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة

ملاحظات :

[١] يجب التعرف على الدالة ما إذا كانت كثيرة حدود أم لا قبل

وضع قاعدتها فى أبسط صورة

أحمد الشنتوي

[٢] عند بحث درجة الدالة يجب وضع قاعدتها فى أبسط صورة
قبل تعيين درجتها

فمثلاً :

$$(١) \text{ الدالة : } د_١(س) = ٣س^٢ - ٣س + ٤س + ٢$$

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

$$(٢) \text{ الدالة : } د_٢(س) = ٣س^٢ + \sqrt{س} - ٥$$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\sqrt{س}$ $\notin \mathbb{Z}$ ط
وهي من الدرجة الثانية

$$(٣) \text{ الدالة : } د_٣(س) = ٣س(٣س - ٣) \text{ كثيرة حدود}$$

$$، \because د_٣(س) = ٣س(٩س^٢ - ٦س + ٩)$$

$$= ٢٧س^٣ - ١٨س^٢ + ٢٧س$$

∴ هي من الدرجة الخامسة

(لاحظ : وضعت الدالة فى أبسط صورة)

$$(٤) \text{ الدالة : } د_٤(س) = ١ + \frac{١}{س}$$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\frac{١}{س}$ $\notin \mathbb{Z}$ ط

$$(٥) \text{ الدالة : } د_٥(س) = ٣س(١ + \frac{١}{س} - ١)$$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\frac{١}{س}$ $\notin \mathbb{Z}$ ط(لاحظ : $د_٥(س) = ٣س + ١ - ٣س$ فى أبسط صورة

، و هي دالة من الدرجة الثانية و لكنها ليست كثيرة حدود)

أحمد الشنتوي

ملاحظة :

إذا كانت د : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فإن :
عند كل قيمة للمتغير قيمة $s \in \mathbb{R}$ توجد قيمة للدالة د
فمثلاً :

$$\text{إذا كان : د (س) = س}^1 + 2\text{س} - 1$$

$$\text{فإن : د (2) = (2) = 2}^1 + 2 \times 2 - 1 = 1 - 2 + 4 = 1$$

$$\text{، د (3) = (3) = 3}^1 + 2 \times 3 - 1 = 1 - 6 + 9 = 4$$

$$\text{، د (}\sqrt{2}\text{) = (}\sqrt{2}\text{) = (}\sqrt{2}\text{)}^1 + 2 \times \sqrt{2} - 1$$

$$= \sqrt{2} + 2 - 1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{، د (0) = (0) = 0}^1 - 1 = -1 \text{ ، د (2-) = صفر}$$

(٣) إذا كان : د (س) = س¹ - 3س + 2 أوجد :

$$\text{[1] د (2) =}$$

$$\text{[2] د (1) =}$$

$$\text{[3] د (3-) =}$$

$$\text{[4] د (}\sqrt{3}\text{) =}$$

$$\text{[5] د (}\frac{1}{2}\text{) =}$$

(1) أي من الدوال التالية تمثل دالة كثيرة حدود ؟ :

$$\text{[1] د (س) = 4س}^2 + 3س - 1$$

$$\text{[2] د (س) = 2س}^3 + \sqrt{3س} - 7$$

$$\text{[3] د (س) = س}^1 + \frac{2}{س} + 2$$

$$\text{[4] د (س) = 4س}^1 - 3س + 1$$

$$\text{[5] د (س) = س (س - 3)}^1$$

(2) إذا كانت د : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فأذكر درجة الدالة في كل حالة :

$$\text{[1] د (س) = 4س}^2 + 2س - 1$$

$$\text{[2] د (س) = 2س - 1}$$

$$\text{[3] د (س) = 2س}^1 - (2س - 1)$$

$$\text{[4] د (س) = 4س}^3 - (3س + 5)$$

$$\text{[5] د (س) = (س - 1)(س + 2)}$$

$$\text{[6] د (س) = س (س - 2س}^1)$$

$$\text{[7] د (س) = س}^1 (س - 3)$$

الدالة الخطية :

الدالة $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $d(s) = p \cdot s + b$ ،
 $p \neq 0$ ، $b \in \mathbb{R}$ ،
تسمى دالة خطية أو دالة من الدرجة الأولى

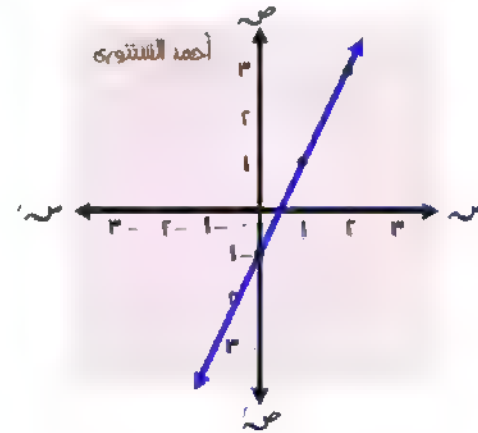
التمثيل البياني للدالة الخطية :

تمثل الدالة الخطية بيانياً بخط مستقيم
فمثلاً :

لتمثيل الدالة $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $d(s) = 2s - 1$
بيانياً نلاحظ : $d(s) = 2s - 1$
 $d(0) = 0 - 1 = -1$ ، $d(1) = 2 - 1 = 1$
 $d(2) = 4 - 1 = 3$
و يمكن وضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كما يلي :

س	٠	١	٢
ص	-١	١	٣

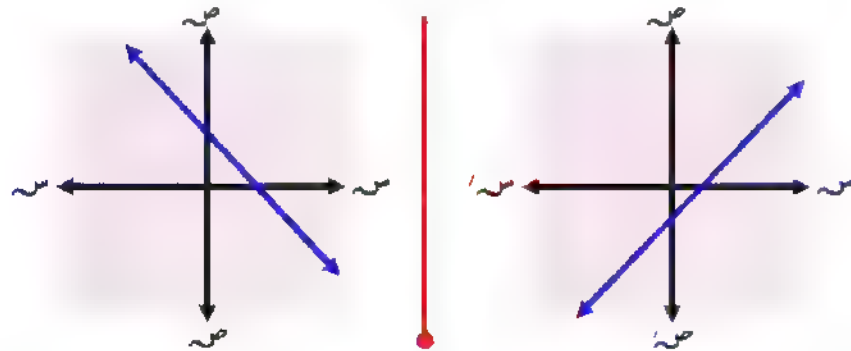
و تمثل الأزواج المرتبة على
الشبكة التربيعية لحاصل
الضرب الكارتي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
و نصل بينها لنحصل على
خط مستقيم



ملاحظات :

- يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة و يفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة التمثيل البياني
- يمكن كتابة الدالة الخطية : $d(s) = p \cdot s + b$ على الصورة : $v = p \cdot s + b$
- لإيجاد نقطة تقاطع الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية مع محور السينات نضع : $v = 0$ ، $d(s) = 0$ ، في قاعدة الدالة ثم نوجد قيمة s المناظرة فتكون النقطة هي $(s, 0)$
- لإيجاد نقطة تقاطع الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية مع محور الصادات نضع : $s = 0$ ، في قاعدة الدالة ثم نوجد قيمة v ، فتكون النقطة هي $(0, v)$
- الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية يصنع مع محور السينات :
 زاوية حادة \parallel إذا كان : $p < 0$
 زاوية منفرجة \angle إذا كان : $p > 0$

كما بالشكل التالي :

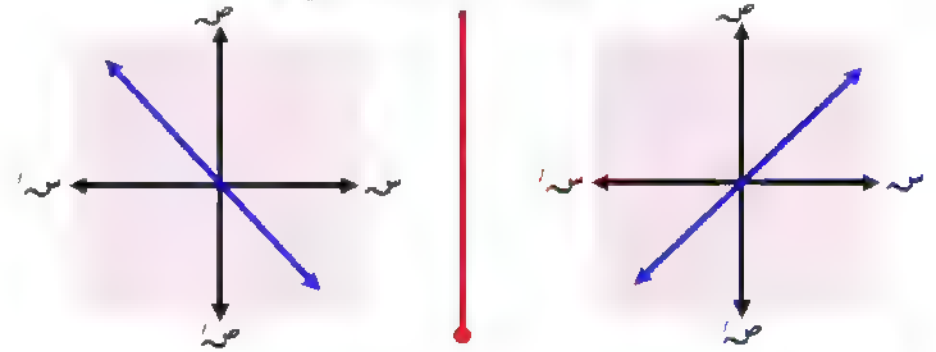


(٥) إذا كانت : $d : \vec{CH} \leftarrow \vec{CH}$ ، $d(S) = M$ حيث : $M \neq 0$.

فإنه يمثلها بيانياً مستقيم يمر بنقطة الأصل ، حيث :

[١] إذا كان : $M < 0$. [٢] إذا كان : $M > 0$.

يكون الشكل كما يلي :

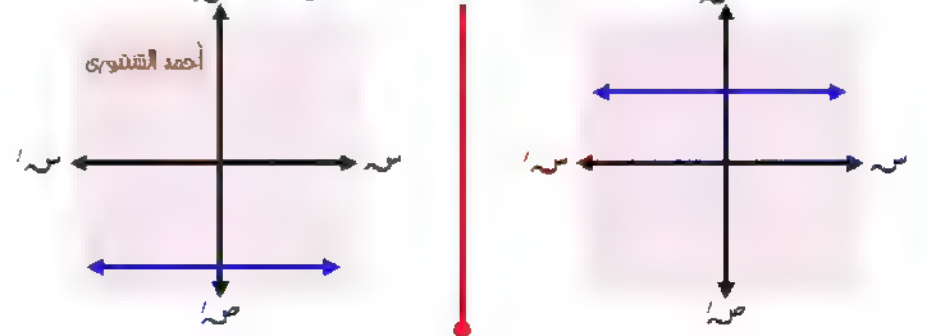


حالة خاصة :

إذا كانت : $d : \vec{CH} \leftarrow \vec{CH}$ ، $d(S) = B$ حيث : $B \in \vec{CH}$ فإن : d تسمى دالة ثابتة ، و تمثل بمستقيم يوازي محور السينات و يمر بالنقطة $(0, B)$.

[١] إذا كان : $B < 0$. [٢] إذا كان : $B > 0$.

يكون الشكل كما يلي :



و إذا كانت : $d(S) = 0$.
فإنها تمثل بمستقيم ينطبق على محور السينات

(٤) مثل بيانياً الدوال التالية ثم أوجد نقط تقاطع كل منها مع محوري الإحداثيات :

[١] $d(S) = S - 1$

[٢] $d(S) = S - 2$

أحمد الشنتوري

$$[٣] \text{ د (س) } = ٢ \text{ س} + ١$$

$$[٤] \text{ د (س) } = ٣ - ٢ \text{ س}$$

(٥) مثل بيانياً الدوال التالية :

$$[١] \text{ د (س) } = ٢ \text{ س}$$

$$[٢] \text{ د (س) } = ٣ - \text{س}$$

(٦) مثل بيانياً الدوال التالية :

$$[١] \text{ د (س) } = ٢$$

$$[٢] \text{ د (س) } = ٣ - \text{س}$$

أحمد الشنتوري

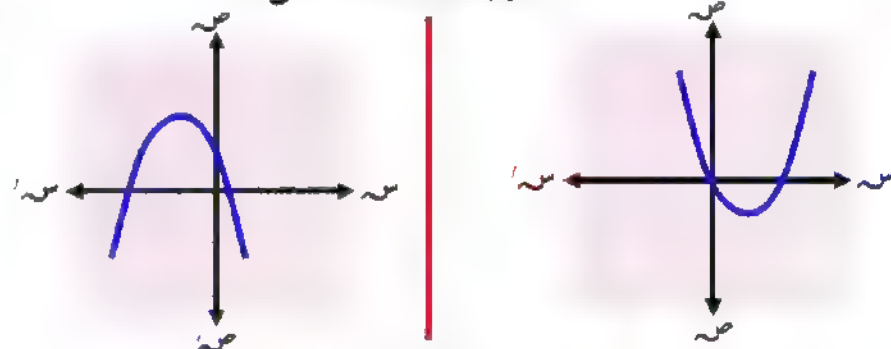
الدالة التربيعية :

الدالة د : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث : $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q = 0\}$ ،
 $p, q \in \mathbb{R}$ ، $p \neq 0$ ،
تسمى دالة تربيعية و هي من الدرجة الثانية

التمثيل البياني للدالة التربيعية :

لتمثيل الدالة التربيعية بيانياً نعين بعض الأزواج المرتبة (x, y) التي تنتمي إلى بيان الدالة حيث : $y = x^2 + px + q$ فنحصل على :
(١) إذا كان : $p < 0$ ،
(٢) إذا كان : $p > 0$.

يكون الشكل كما يلي :



و نلاحظ أن :

(١) المنحنى مفتوح لأعلى

(٢) نقطة رأس المنحنى هي : $(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4})$ ، د $(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4})$

(٣) معادلة محور التماثل هي : $x = -\frac{p}{2}$

(٤) للمنحنى قيمة صغرى عند نقطة رأس المنحنى

أحمد الشنتوي

فمثلاً :

(١) لتمثيل الدالة التربيعية د حيث : $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 3 = 0\}$ متخذاً $x \in [0, 1]$

نجد أن : $[0, 1]$ تعطي بعض القيم الممكنة للمتغير x فنوجد قيم د (س) المناظرة لها كما يلي :
د (١ -) = ٨ ، د (٠) = ٣ ، و هكذا
و نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالتالي :

س	١ -	٠	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	٨	٣	٠	١ -	٠	٣	٨

نعين على الشبكة التربيعية المتعامدة النقاط التي تمثل الأزواج المرتبة ثم نرسم منحنى يمر بهذه النقاط كما بالشكل المقابل و نجد :

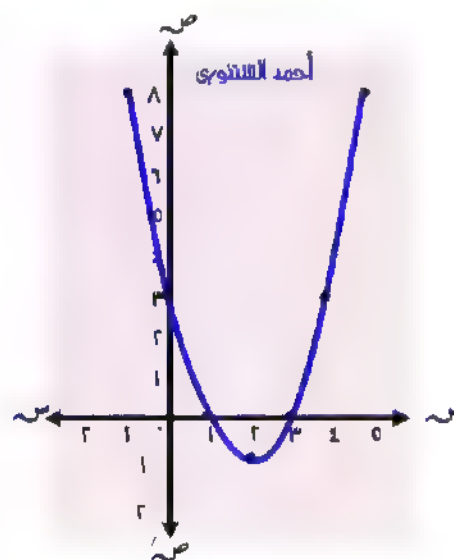
(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى

هي : (٢ ، ١ -)

(٢) معادلة محور التماثل هي :

$x = 2$

(٣) القيمة الصغرى للدالة = ١ -



أحمد الشنتوي

(٢) لتمثيل الدالة التربيعية د حيث : $d(s) = -s^2 - 2s + 4$ متخذاً $s \in [-4, 2]$

نجد أن : $[-4, 2]$ تعطي بعض القيم الممكنة للمتغير s فنوجد قيم $d(s)$ المناظرة لها كما يلي :

$d(-4) = 0$ ، $d(-3) = 5$ ، و هكذا
و نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالتالي :

s	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$d(s)$	0	5	4	3	4	1	0

نعين على الشبكة التربيعية المتعامدة النقاط التي تمثل الأزواج المرتبة ثم نرسم منحنى يمر بهذه النقاط كما بالشكل المقابل و نجد :

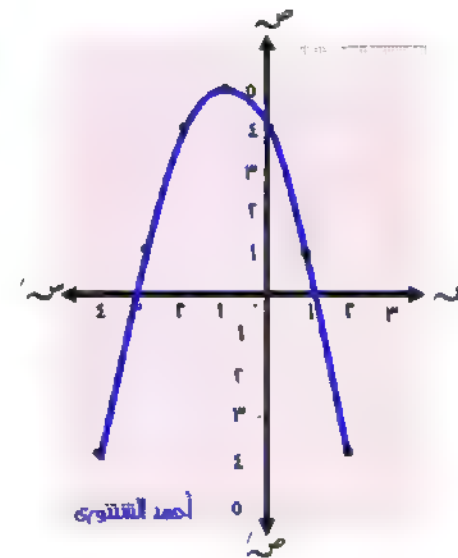
(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى

هي : $(-1, 5)$

(٢) معادلة محور التماثل هي :

$s = -1$

(٣) القيمة العظمى للدالة = 5



أحمد الشنتوري

(٧) مثل بيانياً منحنى الدالة $d(s) = s^2 + 2s + 1$ متخذاً $s \in [-4, 2]$ ثم أوجد : إحداثي رأس المنحنى و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

(٨) مثل بيانياً منحنى الدالة $d(s) = -2s^2 + 4s + 3$

متخذاً $s \in]-1, 3[$ ثم أوجد : إحداثي رأس المنحنى
و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

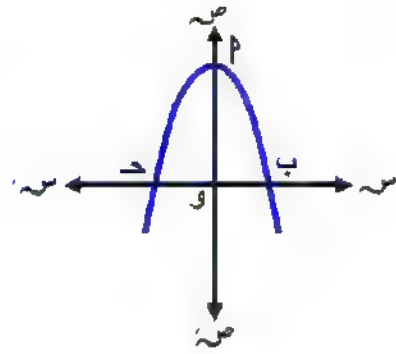
(٩) مثل بيانياً منحنى الدالة $d(s) = (s - 3)^2$

متخذاً $s \in [0, 6]$ ثم أوجد : إحداثي رأس المنحنى
و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

أحمد الشنتوري

(١٠) إذا كان : $d(s) = p s^2 + b s - 3$ ، و كان :
 $b = -2$ ، $(1, -4)$ ينتمي إلى بيان الدالة أوجد قيمة كل
 من p ، b ثم مثل الدالة بيانياً متخذاً $s \in [-2, 4]$

أحمد الشنتوي



(١١) الشكل المقابل :
 يمثل منحنى الدالة d حيث :
 $d(s) = s^2 - m s + 1$
 ، إذا كان : $m = 4$ وحدات
 أوجد : قيمة m ،
 و إحداثي b ، a ثم أحسب
 مساحة $\Delta p b a$

(١٢) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الدالة د حيث : د (س) = ٢س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة

[(٢، ٠) ، (٠، ٠) ، (٠، ٢) ، (٢، ٢)]

[٢] إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = ٣س - ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (٢، ٢) فإن : م =

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٥]

[٣] إذا كانت : د (س) = س + ١ فإن : د (٣) =

[٦ ، ٩ ، ١٠ ، ٢٧]

[٤] إذا كانت : د (س) = س^٢ فإن : د (٢) + د (٢ -) =

[٥] إذا كانت : د (س) = ٤س + ١٠ ، د (٣) = ١٥ فإن : ل =

[٣ - ، ٣ ، ٤ ، ١٥]

[٦] إذا كانت : د (س) = ٧س - $\frac{1}{2}$ ، د ($\frac{1}{2}$) =

[٣ ، $\frac{7}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ٧]

[٧] إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = ٣س - ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (٢، م) فإن : م =

[٣ - ، ٣ ، ٢ ، ١]

أحمد الشنتوي

[٨] إذا كانت : د (س) = س - ٦ ، و كان : $\frac{1}{2}$ د (٢) = - ٢ فإن : م =

[٦ ، $\frac{1}{2}$ ، صفر ، ٢]

[٩] الدالة د حيث : د (س) = س^٢ + س + ٢س - ٣ كثيرة حدود من الدرجة

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١٠] الدالة د حيث : د (س) = س + ١ - ٣س^٢ كثيرة حدود من الدرجة

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١١] الدالة د حيث : د (س) = ٣س (١ + س) كثيرة حدود من الدرجة

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١٢] إذا كانت : د (س) = - س + ٣ فإن : د (١ -) =

[١٣] دالة تربيعية إحداثي رأس المنحنى لها هو (٢، -٣) فإن : معادلة محور التماثل هي : س =

[٦ - ، ٣ - ، ٢ ، ٠]

[١٤] إذا كان : منحنى الدالة د حيث : د (س) = م س - ١ يمر بالنقطة (١، ٠) فإن : م =

[١ - ، ٢ ، ١ ، ٠]

الوحدة الثانية

النسبة و التناسب

و التغير الطردى و التغير العكسى

الدرس الأول : النسبة

تمهيد :

نعلم أن :

النسبة هى مقارنة بين كميتين

فمثلاً :

إذا كان لدى سارة ٦ كراسات ، و ٥ أقلام فإن النسبة بين عدد الكراسات إلى عدد الأقلام يمكن كتابتها بإحدى الصور : ٦ إلى ٥ أو $\frac{6}{5}$

و بصفة عامة :

إذا كان : م ، ب عددين حقيقيين فإن : النسبة بين العدد م ، العدد ب

تكتب بإحدى الصور : م إلى ب أو م : ب أو $\frac{m}{b}$

و يسمى م مقدم النسبة ، ب تالى النسبة

و يسمى م ، ب بحدى النسبة

ملاحظات :

[١] إذا ضربنا حدى النسبة فى عدد حقيقى لا يساوى الصفر

فإن : النسبة لا تتغير

فمثلاً :

$$(١) \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \quad \text{و ذلك بضرب حديها} \times 2$$

$$(٢) \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{و ذلك بضرب حديها} \times \frac{1}{2}$$

أحمد الشنتوي

[٢]

إذا أضفنا إلى حدى النسبة عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر

فإن : النسبة تتغير

فمثلاً :

$$(١) \quad \text{إذا أضفنا ٣ إلى حدى النسبة} \frac{1}{2} \quad \text{نحصل على النسبة} \frac{4}{2}$$

$$\text{لاحظ أن : } \frac{1}{2} \neq \frac{4}{2}$$

كذلك إذا أضفنا (- ٢) إلى حدى النسبة $\frac{6}{9}$ نحصل على

$$\text{النسبة} \frac{4}{7} \quad \text{لاحظ أن : } \frac{6}{9} \neq \frac{4}{7}$$

(٢) لإيجاد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة $\frac{2}{5}$ فإنهاتصبح $\frac{1}{4}$ نتبع ما يلى :

نفرض أن : العدد = س

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{2+s}{5+s}$$

$$\therefore 1(5+s) = 2(2+s)$$

$$\therefore 5+s = 2+4$$

$$\therefore 5-2 = 4-s$$

$$\therefore 3 = s$$

أى أن العدد هو : ٣

أحمد الشنتوي

(١) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة $٧ : ١٢$ فإنها تصبح $٢ : ٣$

(٣) أوجد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله إلى حدى النسبة $٤٩ : ٦٩$ فإنها تصبح $٢ : ٣$

أحمد الشنتوري

(٢) أوجد العدد الذي إذا طرح إلى حدى النسبة $٥ : ٦$ فإنها تصبح $٣ : ٢$

(٤) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة $١٧ : ١١$ فإنها تصبح $٧ : ٦$

(٥) عددان النسبة بينهما ٣ : ٤ ، و إذا أضيف للعدد الأول ٤ ، و طرح من الثانى ٣ أصبحت النسبة بينهما ٨ : ٩ أوجد العددين

[٣] إذا كان : $\frac{p}{q} = \frac{v}{u}$ فإن : هذا لا يعنى أن : $v = p$

، $u = q$ لجميع قيم p ، q ،
و لكن يمكن القول أن : $v = p$ ، $u = q$ حيث : $q \neq 0$.
، و يكون : $v = p$ ، $u = q$ عندما : $q = 1$
فمثلاً :

لإيجاد العددين الحقيقيين الذين النسبة بينهما ٢ : ٣ ، و إذا أضيف للعدد الأول ٤ ، و طرح من الثانى ١٢ أصبحت النسبة بينهما ٥ : ٣ نتبع ما يلى :
∴ النسبة بين العددين ٢ : ٣
∴ نفرض أن العدد الأول = ٢م ، العدد الثانى = ٣م

$$\frac{5}{3} = \frac{2m + 4}{3m - 12}$$

$$\therefore 5(3m - 12) = 3(2m + 4)$$

$$\therefore 15m - 60 = 6m + 12$$

$$\therefore 15m - 6m = 12 + 60$$

$$\therefore 9m = 72$$

$$\therefore m = 8$$

$$\therefore \text{العدد الأول} = 2 \times 8 = 16$$

$$\text{، العدد الثانى} = 3 \times 8 = 24$$

أحمد الشنتوي

(٦) عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ١ : ٢ ، و مربع أصغرهما يزيد عن أربعة أمثال أكبرهما بمقدار ٩ أوجد العددين

(٧) إذا كانت النسبة بين بعدي مستطيل ٢ : ٣ ، و كان محيط المستطيل ٦٠ سم أوجد بعدي المستطيل و مساحته

(٩) إذا كانت النسبة نسبة النجاح بمحافضة أسوان للشهادة الإعدادية ٨٣ % و كانت نسبة نجاح البنين ٧٩ % و نسبة نجاح البنات ٨٩ % أوجد النسبة بين عدد البنين إلى عدد البنات

أحمد الشنتوي

(٨) إذا كانت النسبة بين طول قاعدة و ارتفاع مثلث ٣ : ٢ ، و كانت مساحة المثلث ٤٨ سم^٢ أوجد طول القاعدة و الارتفاع

(١٠) قطعة سنك طولها ١٥٢ سم قسمت إلى جزئين بنسبة ٨ : ١١ ، و صنع من الأول دائرة و من الثاني مربع أوجد النسبة بين مساحة الدائرة إلى مساحة المربع ($\frac{22}{7} = \pi$)

الدرس الثاني : التناسب

تمهيد :

الجدول التالي يوضح مجموعتين من الأعداد :

المجموعة م	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المجموعة ب	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \frac{7}{28}$$

و أن : كل عددين متناظرين من المجموعتين يكونان نسبة
في هذه الحالة يقال أن : أعداد المجموعة م تتناسب مع الأعداد
المتناظرة لها في المجموعة ب
و تسمى هذه الصورة التي تعبر عن تساوي نسبتيين أو أكثر : التناسب

تعريف :

التناسب هو تساوي نسبتيين أو أكثر

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

فإن : الكميات م ، ب ، د ، ع تكون متناسبة ، و بالعكس

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

و يسمى م (الأول المتناسب) ، ب (الثاني المتناسب)

، د (الثالث المتناسب) ، ع (الرابع المتناسب)

كما يسمى م ، ع (طرفي التناسب) ، ب ، د (وسطي التناسب)

خواص التناسب :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ، } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ حيث } \frac{a}{b} \neq 0 \text{ ، } \frac{c}{d} \neq 0 \text{ فمثلاً :}$$

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\text{فإن : إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ، } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ حيث } \frac{a}{b} \neq 0 \text{ ، } \frac{c}{d} \neq 0$$

$$\text{لاحظ : إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\text{فإن : إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ، } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ حيث } \frac{a}{b} \neq 0 \text{ ، } \frac{c}{d} \neq 0$$

$$(2) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ لأيجاد قيمة النسبة } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{نفرض أن : إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ، } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ حيث } \frac{a}{b} \neq 0 \text{ ، } \frac{c}{d} \neq 0$$

$$\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ أوجد قيمة النسبة } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(٢) $a = b = c$ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)
فمثلاً :
(٣) أوجد العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد : ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

$$1 \text{ إذا كان : } \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\text{فإن : } 24 = 8 \times 3 , 24 = 4 \times 6$$

(٢) لإيجاد الثالث المتناسب للكميات : ٨ ، ٩ ، ٢٧

نفرض أن : الثالث المتناسب هو : س

∴ الكميات : ٨ ، ٩ ، س ، ٢٧ متناسبة

$$\therefore \frac{8}{9} = \frac{27}{S} \therefore 8 \times S = 27 \times 9$$

$$\text{و منها : } S = 24$$

(٢) أوجد الرابع المتناسب للكميات : ٤ ، ١٢ ، ١٦

(٤) إذا كان : (٢ س + ٣ ص) : (٥ س - ص) = ٢ : ١
أوجد : س : ص ثم أوجد : (٣ س + ص) : (س - ص)

أحمد الشنتوري

$$\frac{p}{e} = \frac{p}{d} \quad (3)$$

فمثلاً :

$$11 \text{ إذا كان : } \frac{7}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{فإن : } \frac{3}{4} = \frac{7}{8} , \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{8} , \quad \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \text{ أي أن : } \frac{2}{8} = \frac{2}{16}$$

$$12 \text{ إذا كان : } \frac{p}{3} = \frac{p}{7} \text{ أوجد قيمة } \frac{p+b}{b-p}$$

$$\therefore \frac{p}{3} = \frac{p}{7} \therefore \frac{p}{6} = \frac{p}{b} \therefore \frac{7}{6} = \frac{p}{b}$$

$$\therefore p = 7 , \quad b = 3 \text{ حيث } m \text{ ثابت } \neq 0$$

$$\therefore \frac{p+b}{b-p} = \frac{7+3}{3-7} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

$$(5) \text{ إذا كان : } \frac{p}{2} = \frac{p}{0} \text{ أوجد قيمة } \frac{p^3 - 2p}{p - p}$$

ثانياً :

$$\text{إذا كان : } p = e = b = d \text{ فإن :}$$

$$\frac{p}{e} = \frac{p}{d} , \quad \frac{p}{e} = \frac{p}{b}$$

فمثلاً :

$$11 \text{ نعلم أن : } 3 \times 8 = 4 \times 6$$

$$\text{فإن : } \frac{3}{8} = \frac{4}{6} , \quad \frac{7}{8} = \frac{2}{4}$$

$$12 \text{ إذا كان : } 4 \text{ س} + 9 \text{ ص} = 12 \text{ س ص} \text{ أوجد س : ص}$$

$$\therefore 4 \text{ س} + 9 \text{ ص} = 12 \text{ س ص}$$

$$\therefore 4 \text{ س} - 12 \text{ س ص} + 9 \text{ ص} = 0$$

$$\therefore (4 \text{ س} - 12 \text{ ص}) = 0 \therefore 4 \text{ س} - 12 \text{ ص} = 0$$

$$\therefore 2 \text{ س} = 3 \text{ ص} \therefore \text{س : ص} = 3 : 2$$

$$(7) \text{ إذا كان : } 20 \text{ س} + 4 \text{ ص} = 20 \text{ س ص} \text{ أوجد س : ص}$$

أحمد الشنتوري

$$\therefore 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^2 + b^3 - p^3}{a - b - p^3}$$

(٢) بفرض أن : $\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{p}{0}$ ، m ثابت $\neq 0$.

$$\therefore a = r \cdot m , b = s \cdot m , p = 0 \cdot m$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^3 - p^3}{a - b - p^3} =$$

$$1 = \frac{r^2 m^2}{r^2 m^2} = \frac{r^2 m^2 + s^3 m^3 - 0 \cdot m^3}{r^2 m^2 - s^3 m^3 - 0 \cdot m^3}$$

و هي نفس الإجابة التي حصلنا عليها سابقاً

(٧) إذا كان : $\frac{a}{0} = \frac{b}{2} = \frac{p}{3}$ أثبت أن :

$$\frac{1}{r} = \frac{a - b^2}{a + b^2 - p^3}$$

ثالثاً : إذا كان : $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{p}{r} = \dots$ ،

$$r \in \dots , m , m , m , \dots$$

فإن : إحدى النسب = $\frac{a^2 + b^3 + p^4 + \dots}{b^2 + p^3 + \dots}$ أي أن :

إحدى النسب (كل نسبة) = مجموع المقدمات : مجموع التوالى
فمثلاً :

[١] إذا كان : $\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{p}{0}$ فإن :

$$(١) \text{ لإيجاد قيم : } \frac{a^2 + b^3 - p^3}{a - b - p^3}$$

نضرب حدى النسبة الأولى $\times 3$ ، حدى النسبة الثانية

$\times (3 -)$ ، حدى النسبة الثالثة $\times 2$

و جمع المقدمات و التوالى ينتج :

$$\text{إحدى النسب} = \frac{a^2 + b^3 - p^3}{r^2 \times 2 + 3 \times 3 - 0 \times 3} = \frac{a^2 + b^3 - p^3}{1} =$$

و بالمثل نضرب حدى النسبة الأولى $\times 3$ ، حدى النسبة

الثانية $\times (1 -)$ ، حدى النسبة الثالثة $\times (1 -)$ فينتج :

$$\text{إحدى النسب} = \frac{a - b^2 - p^3}{r \times 1 - 3 \times 1 - 0 \times 3} = \frac{a - b^2 - p^3}{1} =$$

$$\therefore \frac{a - b^2 - p^3}{1} = \frac{a^2 + b^3 - p^3}{1}$$

أحمد الشنتوري

(٨) إذا كان : p, b, d, e كميات متناسبة أثبت أن :

$$\frac{e^2 - b^2}{e^2 + b^2} = \frac{d^2 - p^2}{d^2 + p^2} \quad [1]$$

$$\frac{d^2 + p^2}{e^2 + b^2} = \frac{d^2 - p^2}{e^2 - b^2} \quad [2]$$

$$[2] \text{ إذا كان : } \frac{p}{b} = \frac{d}{e} \text{ أثبت أن : } \frac{e^2 + b^2}{e^2 - b^2} = \frac{d^2 + p^2}{d^2 - p^2}$$

لاحظ : يمكن أن يقال (p, b, d, e كميات متناسبة)

$$(1) \text{ بفرض أن : } \frac{p}{b} = \frac{d}{e} = k \text{ ، } k \text{ ثابت } \neq 0$$

$$\therefore p = kb, \quad d = ke$$

$$\therefore \text{ الطرف الأيمن } = \frac{d^2 + p^2}{d^2 - p^2} = \frac{(ke)^2 + (kb)^2}{(ke)^2 - (kb)^2} = \frac{k^2(e^2 + b^2)}{k^2(e^2 - b^2)}$$

$$= \frac{e^2 + b^2}{e^2 - b^2} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$[2] \therefore \frac{p}{b} = \frac{d}{e}$$

بضرب حدى النسبة الأولى $\times 2$ ، حدى النسبة الثانية $\times 3$

فإن : إحدى النسب = مجموع المقدمات : مجموع التوالى

$$\therefore \text{ إحدى النسب } = \frac{d^2 + p^2}{e^2 + b^2} \quad (1)$$

بضرب حدى النسبة الأولى $\times 7$ ، حدى النسبة الثانية $\times (-2)$

فإن : إحدى النسب = مجموع المقدمات : مجموع التوالى

$$\therefore \text{ إحدى النسب } = \frac{d^2 - p^2}{e^2 - b^2} \quad (2)$$

$$\text{من (1) ، (2) ينتج : } \frac{d^2 + p^2}{e^2 + b^2} = \frac{d^2 - p^2}{e^2 - b^2}$$

$$\therefore \frac{e^2 + b^2}{e^2 - b^2} = \frac{d^2 + p^2}{d^2 - p^2}$$

أحمد الشنتوري

$$(٩) \text{ إذا كان : } \frac{p}{b} = \frac{c}{e} \text{ أثبت أن : } \frac{p}{b+e} = \frac{c}{a+p}$$

$$(١١) \text{ إذا كان : } \frac{p}{b} = \frac{c}{e} = \frac{a}{d} \text{ أثبت أن : } \frac{a^2 - 2b^2 + 5c^2}{a^2 - 2b^2 + 5c^2} = \frac{a^2 - 2b^2 + 5c^2}{a^2 - 2b^2 + 5c^2}$$

أحمد الشنتوري

$$(١٠) \text{ إذا كان : } s, v, c, l \text{ كميات متناسبة أثبت أن : } \frac{s}{v} = \frac{s'+c'}{s+v+c+l}$$

$$(١٢) \text{ إذا كان : } \frac{e}{p-2} = \frac{v}{d-2} = \frac{s}{b+2} \text{ أثبت أن : } \frac{e+2v+2s}{b+2} = \frac{e+2v+2s}{b+2}$$

(13) إذا كان : $\frac{p}{2m+3} = \frac{b}{3m-5} = \frac{c}{3m-5}$ أثبت أن : $\frac{7}{19} = \frac{p+2b}{c+b}$

(10) إذا كان : $\frac{ص}{ص-ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س+ص}{ع}$ (بشرط $ص \neq 0$)
 أثبت أن : كلاً من هذه النسب تساوي 2 ثم أوجد $س : ص : ع$

(14) إذا كان : $\frac{ع + س}{٦} = \frac{ع + ص}{٥} = \frac{ص + س}{٧}$: أثبت أن : $\frac{ع + ص + س}{س - ع} = ٥$

(17) إذا كان : $\frac{p}{p-b} = \frac{d}{d-e}$ أثبت أن : p, b, d, e كميات متناسبة

التناسب المتسلسل

تمهيد :

إذا كان لدينا الأعداد : ٣ ، ٦ ، ١٢ و قارنا بين النسب :

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} , \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{نجد أن : } \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

و نلاحظ أن :

$$(1) \quad 3 \times 12 = 6 \times 6 \quad \text{أي أن : } 12 \times 3 = 6 \times 6$$

(٢) إذا استبدلنا العدد ٦ بالعدد (٦ -) نجد أن :

$$(6 -) \times 3 = 12 \times 6$$

(٣) الأعداد : ٣ ، ٦ ، ١٢ تكون متناسبة ،

و الأعداد : ٣ ، ٦ - ، ١٢ تكون متناسبة أيضاً
و يسمى التناسب في هذه الحالة (تناسباً متسلسلاً)

تعريف :

يقال للكميات : م ، ب ، د أنها في تناسب متسلسل

$$\text{إذا كان : } \frac{b}{d} = \frac{p}{c}$$

و يسمى : م بالأول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب ،
د بالثالث المتناسب

$$\text{حيث : } b = \sqrt{d \times p} \quad \text{أو} \quad b = \pm \sqrt{d \times p}$$

لاحظ أن :

الكميتين م ، د يجب أن تكونا موجبتين معاً أو سالبتين معاً

فمثلاً :

(١) الوسط المتناسب بين : ٢ ، ٨

$$x = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = \pm 4$$

(٢) لإيجاد الثالث المتناسب بين : ٦ ، ٢٤

نفرض أن : الثالث المتناسب هو س

∴ ٩ ، ١٢ ، س في تناسب متسلسل

$$\therefore \frac{9}{12} = \frac{12}{s} \quad \therefore 9s = 144 \quad \therefore s = 16$$

ملاحظة :

إذا كان : م ، ب ، د في تناسب متسلسل أو (كميات متناسبة) أو

(ب وسط متناسب بين م ، د) و فرضنا أن : $\frac{p}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{a}$

فإن : ب = د = م (١) ، م = ب = د ، بالتعويض من (١) ينتج :

$$m = b = d = m \times d = d \times m$$

فمثلاً :

إذا كان : م ، ب ، د في تناسب متسلسل أثبت أن :

$$\frac{p}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{a} \quad \text{نفرض أن : } \frac{p}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{a}$$

$$\therefore b = d = m , \quad d = m$$

$$(1) \quad m = \frac{(1-m)d}{(1-m)d} = \frac{d-d}{d-d} = \frac{0}{0}$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيسر} = \frac{d}{m} = \frac{d}{d} = 1$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

أحمد الشنتوي

(١٧) إذا كان : p ، b ، c كميات متناسبة أثبت أن :

$$\frac{b}{c} = \frac{b^2 + p}{c^2 + p} \quad [1] \quad \frac{b^3}{p^3 c} = \frac{b^2 + p}{c^2 + p} \quad [2]$$

(١٨) إذا كان : b وسط متناسب بين p ، c أثبت أن :

$$\frac{p}{b} = \frac{b^2 + p}{c^2 + p} \quad [1] \quad \frac{p}{c} = \frac{b^2 + p}{c^2 + p} \quad [2]$$

أحمد الشنتوري

ملاحظة :

إذا كان : p, b, d, e في تناسب متسلسلو فرضنا أن : $\frac{p}{b} = \frac{b}{d} = \frac{d}{e} = r$ فإن : $d = re$ (1) ، $b = dr$ ، بالتعويض من (1) ينتج :

$$b = dr = re \times r = r^2 e \quad (2)$$

، $p = br$ ، بالتعويض من (2) ينتج :

$$p = br = r^2 e \times r = r^3 e$$

فمثلاً :

إذا كان : p, b, d, e في تناسب متسلسل أثبت أن :

$$\frac{p+b}{d+e} = \frac{p+d}{b+e}$$

$$\text{نفرض أن : } \frac{p}{b} = \frac{b}{d} = \frac{d}{e} = r$$

$$\therefore d = re, b = dr, p = br = r^2 e$$

$$(1) \quad r = \frac{\text{الطرف الأيمن}}{\text{الطرف الأيسر}} = \frac{p+d}{b+e} = \frac{r^2 e + re}{dr + e} = \frac{r^2 e + re}{r^2 e + e}$$

$$(2) \quad r = \frac{\text{الطرف الأيمن}}{\text{الطرف الأيسر}} = \frac{p+b}{d+e} = \frac{r^2 e + dr}{re + e} = \frac{r^2 e + dr}{r^2 e + e}$$

من (1) ، (2) \therefore الطرفان متساويان

أحمد الشنتوري

(٢٠) إذا كان : p, b, c, e في تناسب متسلسل أثبت أن :

$$[1] \quad \frac{p}{b + e} = \frac{c}{c + e} \quad [2] \quad \frac{p - c}{c - b} = \frac{p + c}{c + b}$$

(٢١) إذا كان : $3, l, 12, m$ في تناسب متسلسل

أوجد قيمة كل من : l, m

أحمد الشنتوري

(٢٢) إذا كان : s, v, e أطوال أضلاع متناسبة في مثلث ،

$s + v = 12$ سم ، $v + e = 18$ سم أوجد $s : v$

[٥ ، ٩ ، ١١ ، ١٦]

[١٠] إذا كان $\frac{ص}{٢} = \frac{س}{٣}$ ، $٤٦ = ٣ص + ٢س$ ،

فإن : س =

[١١] إذا كان : ٥ س ، ٢ ، ٣ ص ، ٧ متناسبة فإن : ٢ =

[$\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٧}$]

[١٢] الثالث المتناسب للعديدين : ٩ ، - ١٢ هو

[١٠.٨ - ، ١٦ ، ٨ ، ١٦ -]

[١٣] إذا كان العدد : ٦ هو الوسط المتناسب الموجب للعديدين :

٢ ، ٣ فإن : ٣ = [٣٦ ، ١٨ ، ١٢ ، ٨]

[١٤] إذا كان : $\frac{١}{ب} = \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$ فإن : ٢ =

[٢٥٠ ، ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠]

[١٥] العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد : ١ ، ٣ ، ٦ لتصبح

في تناسب متسلسل هو [٤ ، ٣ ، ٢ ، ١]

[١٦] إذا كان : ٢ ، ٣ ، ٩ ، ب في تناسب متسلسل فإن :

..... [٨١ ، ٢٨ ، ٢٧ ، ١]

[١٧] إذا كان : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل فإن :..... [$\frac{١}{٧}$ ، ١٤ ، ٧ ، ١]

[١٨] إذا كان : ٢ ، ٦ ، س + ١٥ متناسبة فإن : س =

[٤ ، ٣ ، ٢ ، ١]

(٢٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $\frac{٢}{٥} = \frac{س}{ص}$ فإن : س =[$\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ١٥ ، ٢]

[٢] إذا كان : ٨ ، ٦ ، س ، ١٢ متناسبة فإن : س =

[٢٤ ، ١٦ ، ٦ ، ٤]

[٣] إذا كان : س ، ٥ ، ٢٧ ، ٤٥ متناسبة فإن : س =

[٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٠]

[٤] إذا كان : ٣ ، ١ - ب ، ١ + ب ، ٥ متناسبة

فإن : ب = [٨ ± ، ٨ ، ٤ ± ، ٤]

[٥] إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{ص}$ =[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٢}{٤}$][٦] إذا كان : $\frac{٣}{٥} = \frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{٣}{ص} = \frac{١}{س}$ =[$\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$][٧] إذا كان : ٩ س = ٢٥ ص حيث : س ، ص $\in \mathbb{N}$ فإن :

..... [٩ : ٢٥ ، ٢٥ : ٩ ، ٣ : ٥ ، ٥ : ٣]

[٨] إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ =[٣ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٥ ، $\frac{٤}{٥}$][٩] إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧} = \frac{٢س + ص}{١٠}$ فإن : ب =

أحمد الشنتوي

الدرس الثالث : التغير الطردى و التغير العكسى

أولاً : التغير الطردى
تمهيد :

إذا تحركت سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٠ م / ث ، و كانت المسافة المقطوعة (ف) بالمتر فى زمن قدره (ن) ثانية تعطى من العلاقة : $ف = ع \cdot ن$ فإنه يمكن تكوين الجدول التالى ، و تمثيل هذه العلاقة كما بالشكل المقابل

ن	١	٢	٣	٤	٥
ف	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠

و نلاحظ أن :

(١) الخط المستقيم الممثل لهذه العلاقة

يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

(٢) إذا أخذنا أى قيمتين للزمن (ن) و لتكونا : $ن = ٢$ ، $ن = ٥$

فإن القيمتين المناظرتين لهما للمسافة المقطوعة (ف) تكونا :

 $ف = ٢٠$ ، $ف = ٥٠$ فتكون : نسبة التغير فى الزمن = $\frac{٢}{٥} = \frac{٢٠}{٥٠}$ ، نسبة التغير فى المسافة نتيجة التغير فى الزمن = $\frac{٢}{٥} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥}$ أى أن : التغير الذى حدث فى الزمن نتج عنه

تغير فى المسافة بنفس النسبة ، و يقال فى هذه الحالة أن العلاقة بين المسافة و الزمن هى علاقة تغير طردى (تناسب طردى)

أحمد الشنتوي

أو أن المسافة تتغير طردياً بتغير الزمن ، و يعبر عن ذلك بالعلاقة :
ف \propto ن و تقرأ (ف تتغير طردياً مع ن)

(٣) $\frac{ف}{ن} = ١٠$ (مقدار ثابت) أى أن : $ف = ١٠ \cdot ن$ (٤) $\frac{١}{ن} = \frac{ف}{١٠}$

تعريف :

يقال أن : ص تتغير طردياً مع س و تكتب : $ص \propto س$ إذا كانت :
 $ص = م \cdot س$ (م ثابت $\neq ٠$)

و إذا أخذ المتغير س القيمتين $س_١$ ، $س_٢$ و أخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$ ، $ص_٢$ على الترتيب فإن : $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

ملاحظات :

(١) العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين : س ، ص

و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

(٢) إذا كان : $ص \propto س$ فإن : $ص = م \cdot س$ و يكون : $م = \frac{ص}{س}$ و كذلك إذا كان : $ص = م \cdot س$ فإن : $ص \propto س$

فمثلاً :

إذا كانت $ص \propto س$ و كانت $ص = ٤$ عندما $س = ٣$ لإيجاد قيمة ص عندما $س = ٦$ نتبع ما يلى : \therefore $ص \propto س$ \therefore $ص = م \cdot س$ حيث : م ثابت $\neq ٠$ \therefore $ص = ٤$ عندما $س = ٣$

أحمد الشنتوي

$$\therefore 4 = 3 \times م \therefore م = \frac{4}{3}$$

\therefore العلاقة بين ص ، س هي : ص = $\frac{4}{3}$ س

، عندما س = ٦ فإن : ص = $\frac{4}{3} \times 6 = 8$
و بطريقة أخرى :

$$\therefore \text{ص } \propto \text{س} \therefore \frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2}$$

$$\therefore \text{ص}_1 = 4 \text{ عندما } \text{س}_1 = 3 \text{ ، } \text{س}_2 = 6 \text{ ، } \text{ص}_2 = ?$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{\text{ص}_2}{6} \therefore \text{ص}_2 = \frac{4}{3} \times 6 = 8$$

(١) إذا كانت ص \propto س و كانت ص = ١٤ عندما س = ٧

أوجد : [١] العلاقة بين ص ، س

[٢] س عندما ص = ٢٠

(٢)

إذا كانت ص \propto س و كانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ص عندما س = ٦٠

(٣)

إذا كانت م تتغير طردياً مع ب و كانت م = ٤ عندما ب = ١٢

أوجد م عندما ب = ٣٦

أحمد الشنتوي

(٤) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن ، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومتراً في ٦ ساعات ، فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات ؟

لاحظ :

إذا كان : $ص = م$ فإن : $ص \propto م$

فمثلاً :

إذا كان : $\frac{ص}{ع} = \frac{٢١ - ص}{٧ - ص}$ لإثبات أن : $ص \propto ع$

نتبع ما يلي :

$$\therefore \frac{ص}{ع} = \frac{٢١ - ص}{٧ - ص}$$

$$\therefore ٢١ ص - ع ص = ٧ ص - ص ص$$

$$\therefore ٧ ص = ٢١ ص - ع ص \quad \therefore ٣ ع = ص \quad \therefore ص \propto ع$$

(٦) إذا كان : $\frac{٢ + پ}{٦} = \frac{٢ + پ}{٣}$ أثبت أن : $پ \propto ح$

(٥) إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طردياً مع وزنه على القمر (م) و كان $١٨٢ = م$ كجم ، $٣٥ = م$ كجم أوجد $م$ عندما $٣١٢ = م$ كجم

لاحظ ما يلي :

إذا كان : $V + P = C$ وكانت P تتغير طردياً مع S وكانت $C = 11$ عندما $S = 2$ لإيجاد العلاقة بين S ، P ، قيمة C عندما $S = 0$

نتبع ما يلي :

 $\therefore P = \infty$ $\therefore C = V + P = \infty$ حيث : P ثابت $\neq 0$ $\therefore C = V + P = V + 2 = 11$ $\therefore V = 9$ $\therefore C = 11$ عندما $S = 2$ $\therefore 11 = V + 2 \times P = 9 + 2 \times P \therefore 2 = 2P \therefore P = 1$ وعندما $S = 0$ فإن : $C = V + 0 \times P = 9$ (٧) إذا كان : $C = P + Q$ وكانت P تتغير طردياً مع S و كانت $C = 19$ عندما $S = 0$ أوجد العلاقة بين S ، P ثم أوجدقيمة C عندما $S = 2$

(٨)

إذا كان : $C = P + B$ حيث P ثابت ، B تتغير طردياً مع S و كانت $C = 2$ عندما $S = 0$ ، $C = 8$ عندما $S = 3$ أوجد العلاقة بين S ، P ثم أوجد قيمة C عندما $S = 0$

أحمد الشنتوري

(٩) إذا كان : $C = 5P + Q$ $C = 20$ عندما $S = 0$ أثبت أن : $C = \infty$ عندما $S = \infty$

ثانياً : التغير العكسي

تمهيد :

إذا كانت مساحة المستطيل (م) و أحد بعديه (س) و البعد الآخر (ص) و كانت مساحة المستطيل ثابتة

س	٢	٣	٤	٦	٨
ص	١٢	٨	٦	٤	٣

و تساوي ٢٤ سم^٢ فإن الجدول المقابل يمثل بعض أبعاد هذا المستطيل

نلاحظ ما يلي :

(١) إذا أخذنا أي قيمتين للمتغير س و لتكونا : س_١ = ٢ ، س_٢ = ٦

فإن القيمتين المناظرتين لهما للمتغير ص تكونا : ص_١ = ١٢ ،

ص_٢ = ٤ فتكون نسبة التغير في (س) $\frac{٢}{٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

و نسبة التغير في (ص) $\frac{١٢}{٤} = \frac{٣}{١} = \frac{٣}{١}$

، التغير في (س) هو المعكوس الضربي لنسبة التغير في (ص) و يقال في هذه الحالة أن العلاقة بين (ص) ، (س) هي علاقة تغير عكسي (أو تناسب عكسي)

و يعبر عن ذلك بالعلاقة : ص $\propto \frac{١}{س}$

و تقرأ (ص تتغير عكسياً مع س أو ص تتغير بتغير $\frac{١}{س}$)

أو ص تتغير طردياً بتغير المعكوس الضربي لـ (س)

(٢) س ص = ٢٤ (مقدار ثابت) أي أن : ص = $\frac{٢٤}{س}$

$$(٣) \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$$

تعريف :

يقال أن ص تتغير عكسياً مع س و تكتب ص $\propto \frac{١}{س}$ إذا كانت

ص س = م (أي أن : ص = $\frac{م}{س}$ ، حيث : م ثابت $\neq ٠$)

و إذا أخذ المتغير س القيمتين س_١ ، س_٢ و أخذ المتغير ص القيمتين

$$ص_١ ، ص_٢ على الترتيب فإن : \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$$

ملاحظات :

(١) العلاقة السابق ليست علاقة خطية بين المتغيرين : س ، ص و لا يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

(٢) إذا كان : ص $\propto \frac{١}{س}$ فإن : ص = $\frac{م}{س}$

و يكون : ص س = م

و كذلك إذا كان : ص س = م فإن : ص $\propto \frac{١}{س}$

فمثلاً :

إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ و كانت ص = ٤ عندما س = ٣

لإيجاد قيمة ص عندما س = ٦ نتبع ما يلي :

\therefore ص $\propto \frac{١}{س} \therefore$ ص = $\frac{م}{س}$ حيث : م ثابت $\neq ٠$

\therefore ص = ٤ عندما س = ٣

\therefore ٤ = $\frac{م}{٣}$ و منها : م = ١٢ \therefore ص = $\frac{١٢}{س}$

، عندما س = ٦ فإن : ص = $\frac{١٢}{٦} = ٢$

و بطريقة أخرى :

$$\therefore \text{ص} \propto \frac{١}{س} \therefore \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$$

- (١١) إذا كان : v تتغير عكسياً مع s و كانت $v = 4$ عندما $s = 9$
 أوجد : [١] العلاقة بين v ، s
 [٢] قيمة s عندما $v = 12$

$$v = 4 \text{ عندما } s = 9, \quad s = 6 \text{ عندما } v = 3$$

$$\therefore \frac{v}{s} = \frac{4}{9} = \frac{3}{6} \quad \therefore v = \frac{4}{9} \times s = \frac{4}{3} s$$

- (١٠) إذا كان : $v \propto \frac{1}{s}$ و كانت $v = 10$ عندما $s = 3$
 أوجد : [١] العلاقة بين v ، s
 [٢] قيمة v عندما $s = 0$

أحمد الشنتوي

- (١٢) إذا كان : $s' = s + 49$ ، $v = 14$ s v
 أثبت أن : v تتغير عكسياً مع s

(١٣) إذا كان مقدار السرعة (ع) التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتناسب عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (ق) و كانت ع = ٥ سم / ث عندما ق = ٣ سم أوجد ع عندما ق = ٢,٥ سم

(١٥) من بيانات الجدول التالي أجب عن ما يلي :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

[١] نوع التغير ص ، س

[٢] أوجد ثابت التناسب

[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٣

[٤] أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

أحمد الشنتوري

(١٤) إذا كان عدد الساعات (ر) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في ٤ ساعات أوجد الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل

(١٦) من بيانات الجدول التالي أجب عن ما يلي :

س	١	٤	٦
ص	١٢	٤٨	٧٢

[١] نوع التغير ص ، س

[٢] أوجد ثابت التناسب

[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٢

[٤] أوجد قيمة س عندما ص = ٣٦

(١٧) إذا كانت $س = ع + ٨$ وكانت $ع$ تتغير عكسياً مع $س$ و كانت $ع = ٢$ عندما $س = ٣$ أوجد العلاقة بين $س$ ، $س$ ثم أوجد قيمة $س$ عندما $س = ٣$

(١٩) إذا كانت $س = ٢ - ٢$ وكانت $٢ \propto \frac{١}{س}$ و كانت $س = ١٤$ عندما $س = ١$ أثبت أن : $س' = ١٦ - ٢$ $س'$ ثم أوجد قيمة $س$ عندما $س = ٢$

أحمد الشنتوي

(١٨) إذا كانت $س = ٧ + ٢$ وكانت ٢ تتغير عكسياً مع مربع $س$ و كانت $٢ = ١٨$ عندما $س = \frac{٢}{٣}$ أوجد العلاقة بين $س$ ، $س$ ثم أوجد قيمة $س$ عندما $س = ٢$

(٢٠) إذا كانت $س = ٩ - ٢$ وكانت $س$ تتغير عكسياً مع مربع $س$ و كانت $٢ = ١٨$ عندما $س = \frac{٢}{٣}$ أوجد العلاقة بين $س$ ، $س$ ثم أوجد قيمة $س$ عندما $س = ١$

(٢١) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العلاقة التي تمثل تغير طردى بين المتغيرين s ، v هي

$$[s \text{ ص } v = v , s \text{ ص } v + v = \frac{v}{3} , \frac{v}{3} = \frac{s}{0} , \frac{v}{3} = \frac{s}{3}]$$

[٢] العلاقة التي تمثل تغير عكسي بين المتغيرين s ، v هي

$$[s \text{ ص } v = v , s \text{ ص } v = v + v , s \text{ ص } v = \frac{v}{3} , s \text{ ص } v = v]$$

[٣] إذا كانت v تتناسب عكسياً مع s و كانت $s = \sqrt{3}$ عندما

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{فإن : ثابت التناسب يساوى}$$

$$[1 , 2 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3}]$$

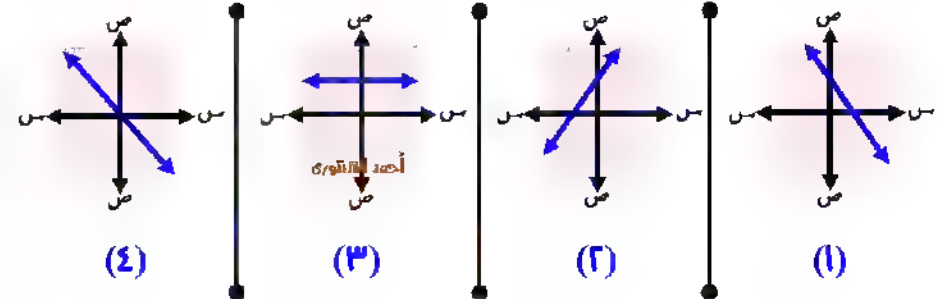
[٤] إذا كانت التكلفة الكلية (v) لرحلة ما بعضها ثابت (p) و

الآخر يتغير بتغير المشتركين (s) فإن :

$$[v = p \text{ ص } , v = \frac{p}{s} \text{ ص } , v = p + \frac{p}{s} \text{ حيث : }]$$

$$m \text{ ثابت } \neq 0 , v = p + m \text{ ص } , m \text{ حيث : } m \text{ ثابت } \neq 0$$

[٥] الشكل البياني الذي يمثل التغير الطردى بين s ، v هو



[٦] إذا كان : $s \text{ ص } = 0$ فإن : $v \text{ ص } \dots$

$$[s , \sqrt{s} , \frac{1}{s} , \frac{1}{s^2}]$$

[٧] إذا كان : $s \text{ ص } = 0$ فإن : $v \text{ ص } \dots$

$$[s , \sqrt{s} , \frac{1}{s} , \frac{1}{s^2}]$$

[٨] إذا كانت $v \text{ ص } \infty$ وكانت $s = 8$ عندما $s = 2$

فإن : $s = \dots$ عندما $s = 12$

$$[1 , 2 , 3 , 4]$$

[٩] إذا كانت $v \text{ ص } \infty$ وكانت $s = 8$ عندما $s = 2$

فإن : $s = \dots$ عندما $s = 4$

$$[2 , 4 , 8 , 16]$$

[١٠] إذا كان : $s - v = s - \frac{1}{s}$ حيث : $s \neq v \neq 0$

فإن : $v \text{ ص } \dots$

$$[s , s + 1 , \frac{1}{s} , \frac{1}{s^2}]$$

[١١] إذا كان : v ، s كميتين متغيرتين و كان : $\frac{v}{s} = \frac{s}{v}$

فإن : $v \text{ ص } \dots$

$$[s , s , \frac{1}{s} , \frac{1}{s^2}]$$

الوحدة الثانية

الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات

تمهيد :

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي ، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمي صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الاستدلال الإحصائي و اتخاذ القرارات المناسبة لذلك يجب اتباع أسلوب علمي صحيح في جمع البيانات ، و جمع البيانات الإحصائية يتطلب معرفة مصادر جمع هذه البيانات و تحديد أسلوب جمعها

مصادر جمع البيانات :

تعريفها	المصادر الأولية (الميدانية)	المصادر الثانوية (التاريخية)
	هي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر	المصادر التي يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية
أمثلة	(١) المقابلة الشخصية (٢) الاستبيان و استطلاع الرأي (٣) الملاحظة و القياس	(١) نشرات الجهاز المركزي للتعبئة و الإحصاء (٢) الإنترنت و وسائل الإعلام
مميزاتها	الدقة	توفير الوقت و الجهد و المال
عيوبها	تحتاج إلى وقت و مجهود كبير ، كما أنها مكلفة مادياً	عدم الدقة أحياناً لبعض المصادر

أحمد الشنتوي

أسلوب جمع البيانات :

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف و حجم المجتمع الإحصائي محل البحث

(و يعرف المجتمع الإحصائي بأنه جميع الأفراد التي يجمعها خصائص عامة واحدة)
و من أساليب جمع البيانات :

أسلوب العينات	أسلوب الحصر الشامل	الأساس الذي يقوم عليه
يقوم على جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من عينة ممثلة للمجتمع كله و اجراء البحث عليها ثم تعميم النتائج على المجتمع كله	يقوم على جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع أفراد المجتمع الإحصائي و يستخدم لحصر جميع أفراد المجتمع	
عينة من دم مريض ، عينة من بعض منتجات مصنع	الانتخابات ، التعداد العام للسكان	أمثلة
(١) توفير الوقت و الجهد و التكاليف (٢) الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة (٣) الطريقة الوحيدة لدراسة بعض المجتمعات المحدودة في بعض الأحيان	(١) الدقة (٢) الشمول (٣) عدم التحيز (٤) التمثيل التام لكل أفراد المجتمع الإحصائي	مميزاته
عدم الدقة إذا كانت العينة لا تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً و تسمى بالعينة المتحيزة	يحتاج إلى وقت و مجهود كبير و تكلفة باهظة	عيوبه

كيفية اختيار العينات و الشروط الواجب توافرها في العينة :

أولاً : الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية) :

و يعنى اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع الإحصائي دون غيرها بطريقة تناسب أهداف البحث و تعرف بالعينة العمدية

ثانياً : الاختيار العشوائي (العينات العشوائية) :

و يعنى اختيار عينة من مفردات المجتمع الإحصائي بحيث تكون ظهور أى من المجتمع فيها متساوية

أنواع العينات العشوائية :

١] العينة العشوائية البسيطة :

هى أبسط أنواع العينات و يتم سحبها من المجتمعات المتجانسة و يتوقف اختيارها على حجم و عدد وحدات المجتمع و يتم اختيارها بطريقتين :

١] إذا كان حجم المجتمع صغيراً :

تعطى كل مفردة في مجتمع الدراسة بطاقة (أو قصاصة ورق) متعائلة مكتوباً عليها أسمه أو رقمه و توضع كل البطاقات في صندوق أو كيس و تخلط جيداً و تسحب بطاقة من الصندوق عشوائياً ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق و تكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة

٢] إذا كان حجم المجتمع كبيراً :

يتم ترقيم جميع مفردات المجتمع ثم تختار العينة من هذه المفردات و تستخدم الآلة الحاسبة أو برنامج اكسيل في إنتاج أرقام عشوائية في النطاق من ٠٠٠٠ إلى ٩٩٩٩. ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩ مع إهمال العلامة العشرية كما تستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسة

لاحظ :

إذا كان حجم المجتمع ٤٠٠ و يراد اختيار عينة عشوائية ١٠% يتم تحديد أرقام أفراد المجتمع المستهدفين في هذه العينة بالآلة الحاسبة كما ما يلي :

∴ عدد أفراد المجتمع = ٤٠٠ فرد

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{10}{100} \times 400 = 40$ فرداً

أى أننا نريد اختيار ٤٠ فرداً يتم اختيارهم و استخدام الآلة الحاسبة كما يلي :

١] تعطى كل فرد رقماً من ١ إلى ٤٠٠

٢] نستخدم الآلة الحاسبة لإنتاج أرقام عشوائية عن طريق مفتاح الأعداد العشرية و يتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين :

On Shift Ran # =

=

و مع تكرار الضغط على = تتوالى ظهور الأرقام فنكرر ذلك ٤٠ مرة لتظهر أرقام عشوائية في النطاق من ٠٠٠١ إلى ٤٠٠. ليصبح النطاق من ١ إلى ٤٠٠ و نحذف العلامة العشرية :

فالعدد : ٠٣٥. يعنى أن رقم الفرد المختار هو ٣٥

و العدد : ٠١٦٨. يعنى أن رقم الفرد المختار هو ١٦٨

و العدد : ٠٢٧. يعنى أن رقم الفرد المختار هو ٢٧.

أما العدد : ٠٠٩. يستبعد لأن ٠٩ خارج نطاق الأعداد

من ١ إلى ٤٠٠

ثم نحدد أفراد المجتمع الذين ظهرت أرقامهم

أحمد الشنتوري

فمثلاً :

ترغب إدارة أحد المصانع فى معرفة آراء ٣٠٠ عامل بالمصنع فى نظام ساعات العمل الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بالمصنع لتحديد أرقام العاملين المستهدفين فى هذه العينة بالآلة الحاسبة نتبع ما يلى :

∴ عدد العاملين بالمصنع = ٣٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{1}{10} \times 300 = 30$ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠٠١ إلى ٣٠٠، ليصبح النطاق من ١ إلى ٤٠٠

(١) قامت إحدى المدارس بدراسة عن كيفية ذهاب التلاميذ إلى المدرسة فإذا كان عدد التلاميذ ٣٣٠ تلميذاً و تم إعطاء كل تلميذ رقماً من ١ إلى ٣٣٠ ، و تم اختيار ١٠٪ لسؤالهم عن طريقة الوصول للمدرسة ما بين : سيراً على الأقدام ، أتوبيس عام ، تاكسى ، دراجة ، سيارة خاصة حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام التلاميذ المستهدفين فى هذه العينة

(٢) قامت إدارة أحد المصانع بإستطلاع آراء ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة و تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ تم اختيار ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من : مشروبات ساخنة ، وجبات خفيفة ، منتجات حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة

(٣) ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بالفندق فى مستوى الخدمة المقدمة لهم فقامت بإعطاء كل نزيل رقماً من ١ إلى ٢٠٠ ، و اختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة

أحمد الشنتوي

٢] العينة العشوائية الطبقيّة :

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس (أي يتكون من مجموعات نوعية تختلف في الصفات) يقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعاً للصفات المكونة له ، و تسمى كل مجموعة بطبقة ، و يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها في المجتمع

و يستخدم القانون :

$$\text{عدد مفردات الطبقة في العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلي}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلي}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

(مقرباً الناتج لأقرب وحدة)

فمثلاً :

إذا كان بإحدى الكليات الجامعية ٤... طالب بالسنة الأولى ، ٣... طالب بالسنة الثانية ، ٢... طالب بالسنة الثالثة ، ١... طالب بالسنة الرابعة و أردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها لحساب عدد مفردات كل طبقة في العينة نتبع ما يلي :

العدد الكلي للطلاب = ١٠٠٠ طالب

$$\text{عدد مفردات الطبقة الأولى} = ٥٠٠ \times \frac{٤٠٠}{١٠٠٠} = ٢٠٠ \text{ طالب}$$

$$\text{عدد مفردات الطبقة الثانية} = ٥٠٠ \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} = ١٥٠ \text{ طالب}$$

$$\text{عدد مفردات الطبقة الثالثة} = ٥٠٠ \times \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} = ١٠٠ \text{ طالب}$$

$$\text{عدد مفردات الطبقة الرابعة} = ٥٠٠ \times \frac{١٠٠}{١٠٠٠} = ٥٠ \text{ طالب}$$

- (٤) مدرسة بها ٣٦٠ طالباً و ٤٨٠ طالبة أرادت المدرسة عمل استبيان على عينة قوامها ٣٥٠ طالباً و طالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، أحسب عدد مفردات كل طبقة من العينة

- (٥) مصنع به ١٢٥ عاملاً ، ٧٥ فنياً ، ٥٠ مهندساً و يراد أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ فرداً تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، أحسب عدد مفردات كل طبقة من العينة

أحمد الشنتوري

(٦) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٥٠٠٠ مفردة و مقسم إلى طبقتين تعداد الطبقة الأولى منهما ١٥٠٠ مفردة فإذا كانت المفردات التمثيل الطبقة الثانية بالعينة ١٤٠ مفردة أحسب عدد المفردات الكلية للعينة

(٨) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٦٠٠٠ مفردة و مقسم إلى أربع طبقات بياناتها كما بالجدول المقابل :
فإذا كان عدد مفردات الطبقة الثانية ٤٠٠ مفردة أوجد حجم العينة كلها

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤
عدد مفردات الطبقة	٢٤٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	٦٠٠

(٧) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠ مفردة و مقسم إلى ثلاث طبقات بياناتها كما بالجدول المقابل :
فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى ٢٤٠ مفردة أوجد حجم العينة كلها

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠	٢٠٠٠	٨٠٠

(٩) مجتمع به ٢٠٠٠ مفردة مقسمة إلى أربع طبقات يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها كما بالجدول التالي :

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤	الإجمالي
عدد مفردات الطبقة	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠
عدد المفردات التي تمثل الطبقة في العينة	٧

أكمل الجدول

أحمد الشنتوي

الدرس الثاني : التشتت

نعلم أن :

كل من (الوسط الحسابي والوسيط و المنوال) من مقاييس النزعة المركزية ، و يمكن حسابها لأي مجموعة من البيانات لتعيين قيمة تصف اتجاه هذه البيانات في التمرکز حول هذه القيمة

فمثلاً :

إذا كان : الأجر الأسبوعي بالجنيهات لمجموعتين من العمال (٢) ، (ب) في أحد المصانع كما يلي :

مجموعة (أ) : ١٧٠ ، ١٨٠ ، ١٨٠ ، ٢٣٠ ، ٢٤٠

مجموعة (ب) : ٥٠ ، ١٨٠ ، ١٩٠ ، ٤٠٠ ، فإن :

تذكر : الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يتعين من العلاقة :

$$\text{الوسط الحسابي لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$$

∴ الوسط الحسابي لأجور المجموعة (أ) =

$$= \frac{٢٤٠ + ٢٣٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٧٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

الوسط الحسابي لأجور المجموعة (ب) =

$$= \frac{٤٠٠ + ١٩٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٥٠}{٥} = ٢٠٠ \text{ جنيه}$$

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً

∴ الوسيط للمجموعة (أ) = ١٨٠

الوسيط للمجموعة (ب) = ١٨٠

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكراراً بين القيم

∴ المنوال للمجموعة (أ) = ١٨٠

المنوال للمجموعة (ب) = ١٨٠

مما سبق نلاحظ أن :

(أ) مجموعتي الأجور مختلفتان و لكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية

(ب) أجور المجموعة (أ) متقاربة فتتوسطها ١٧٠ ، ٢٤٠

جنيهاً ، بينما أجور المجموعة (ب) متباعدة فتتوسطها

بين : ٥٠ ، ٤٠٠ جنيهاً

أي أن : أجور المجموعة (ب) أكثر تشتتاً من أجور المجموعة (أ)

لذلك : عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم

المجموعتين و تباعدها عن بعضها

التشتت :

التشتت لأي مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها ،

و يكون التشتت : صغيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلاً

(أي إذا كانت الفروق بين القيم صغيرة)

و يكون التشتت : كبيراً إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيراً

(أي إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)

و يكون التشتت : صفراً إذا تساوت جميع المفردات

(أي إذا كانت الفروق بين القيم صغيرة)

أي أن : التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة

المركزية و آخر للتشتت لكل مجموعة

أحمد الشنتوي

مقاييس التشتت :

١] المدى :

هو الفرق بين أكبر المفردات و أصغرها في المجموعة
فمثلاً :

بمقارنة المجموعتين التاليتين :

المجموعة الأولى : ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٦

المجموعة الثانية : ١٢ ، ١٤ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٦

نجد أن : مدى المجموعة الأولى = ٢٠ - ٢ = ١٨

مدى المجموعة الثانية = ١٦ - ١٠ = ٦

و على هذا تعتبر المجموعة الأولى أكثر تشتتاً

ملاحظات :

١] المدى هو أبسط و أسهل طرق قياس التشتت

٢] المدى يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة

فمثلاً : لمجموعة القيم : ٢١ ، ٢٢ ، ٦١ ، ٢٥ ، ٢٤

المدى = ٦١ - ٢١ = ٤٠ بينما عند استبعاد المفردة

الكبرى (٦١) فإن : المدى = ٢٦ - ٢١ = ٥

أي : $\frac{1}{8}$ المدى السابق

٣] نظراً لعدم تأثر المدى بأى مفردة في المجموعة عدا المفردتين
الكبرى و الصغرى فقد لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة

٢] الانحراف المعياري :

هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً و أدقها (تحت ظروف خاصة) ،
و هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات القيم عن
وسطها الحسابي
أي أن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

حيث ترمز : σ (سيجما) إلى الانحراف المعياري
، \bar{x} (سين بار) إلى الوسط الحسابي لمفردات المجتمع
، $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ ،

، n إلى عدد المفردات ، \sum مج إلى عملية الجمع

لاحظ أن : $\bar{x} - \bar{x}$ تعني انحراف القيم عن الوسط الحسابي

أولاً : حساب الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات :

فمثلاً :

س	$\bar{x} - \bar{x}$	$(\bar{x} - \bar{x})^2$
٨	٨ - ٧ = ١	١
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٦	٦ - ٧ = -١	١
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
٣٥	المجموع	١٠

لحساب الانحراف المعياري

للقيم : ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

نكون الجدول المقابل حيث :

الوسط الحسابي $\bar{x} =$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{35}{7} = 5$$

الانحراف المعياري $\sigma =$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{7}} = 1,2$$

(١) أحسب الانحراف المعياري للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

(٣) أحسب الانحراف المعياري للقيم : ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٣٥

أحمد الشنتوري

(٢) أحسب الانحراف المعياري للقيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٤) أحسب الانحراف المعياري للقيم : ١٥ ، ١٢ - ، ٩ - ، ٦ - ، ٢٧

(٥) أحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لكل من :

المجموعة (أ) : ٧٠ ، ٧٠ ، ٧٠ ، ٦٥ ، ٦١ ، ٦٤ ، ٧٦ ، ٧٠ ، ٧٠

المجموعة (ب) : ٧٧ ، ٩١ ، ٣٩ ، ٥٠ ، ٨٥ ، ٧٧ ، ٤٦

أي المجموعتين (أ) ، (ب) أكثر تجانساً

(٦) الجدول المقابل يبين درجات الحرارة

في بعض المدن

[١] أحسب الانحراف المعياري لدرجة

الحرارة العظمى

[٢] أحسب الانحراف المعياري لدرجة

الحرارة الصغرى

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

أحمد الشنتوي

س	ك	س × ك	س - س	(س - س)²	(س - س) × ك
٠	٨	٠	٢ -	٤	٣٢
١	١٦	١٦	١ -	١	١٦
٢	٥٠	١٠٠	٠	٠	٠
٣	٢٠	٦٠	١	١	٢٠
٤	٦	٢٤	٢	٤	٢٤
مج	١٠٠	٢٠٠	أحمد الشنتوي		٩٢

الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$ طفل

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} = ١$ طفل

ملاحظات :

(١) يتأثر الانحراف المعياري بانحرافات جميع القيم و بالتالي تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة

(٢) الانحراف المعياري له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية لذلك يستخدم في المقارنة بين تشتت المجموعات التي لها نفس وحدات القياس عند تساويها في الوسط الحسابي و تكون المجموعة الأكبر في الانحراف المعياري هي الأكثر تشتتاً

(٣) لحساب الانحراف المعياري للتوزيع التكراري ذي المجموعات التالي الذي يبين درجات الحرارة في بعض المدن :

المجموعات	- ٥	- ١٥	- ٢٥	- ٣٥	- ٤٥
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

ثانياً : حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري :
لأي توزيع تكراري يكون :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج} (س - \bar{س})^2}{\text{مج} ك}}$$

حيث : س تمثل القيمة أو
مركز المجموعة (في حالة التوزيع التكراري ذي المجموعات)
تذكر :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{٢}$$

ك تكرار القيمة أو المجموعة

مج ك مجموع التكرارات

$$\text{الوسط الحسابي } \bar{س} = \frac{\text{مج} س \times ك}{\text{مج} ك}$$

فمثلاً :

(١) لحساب الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي الذي يبين عدد أطفال بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

نعتبر عدد الأطفال : س ، و عدد الأسر : ك
ثم نكون الجدول التالي :

(٧) التوزيع التكراري التالي يوضح عدد الأهداف التي سجلت في عدد مباريات كرة القدم

عدد الأهداف	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

أوجد الانحراف المعياري لعدد الأهداف

نعتبر : \bar{x} مركز المجموعة فيكون :

$$\bar{x} = \frac{10 + 0}{2} = 5 \text{ ، و هكذا}$$

ثم نكون الجدول التالي :

المجموعات	ل	س	س × ل	س - \bar{x}	(س - \bar{x}) ^٢	(س - \bar{x}) ^٢ × ل
٥ -	٧	١٠	٧٠	- ٥	٢٥	١٧٥
١٥ -	٩	٢٠	١٨٠	- ٥	٢٥	١٨٠
٢٥ -	١١	٣٠	٣٣٠	- ٥	٢٥	٢٧٥
٣٥ -	١٥	٤٠	٦٠٠	٥	٢٥	٣٧٥
٤٥ -	٨	٥٠	٤٠٠	٥	٢٥	٢٠٠
مج	٥٠	١٥٨٠	٨٢٧٢			

$$\bar{x} = \frac{1580}{50} = 31.6 \text{ درجة}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8272}{50}} = 12.9 \text{ درجة}$$

أحمد الشنتوي

(٨) التوزيع التكراري التالي يبين عدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠ صندوق في الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٢	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٦

أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة

(٩) التوزيع التكراري التالي يبين أعمار ١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١

أوجد الانحراف المعياري للعمر بالسنوات

أحمد الشنتوي

(١٠) للتوزيع التكراري التالي :

المجموعات	صفر -	- ٤	- ٨	- ١٢	- ١٦
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩

أوجد الانحراف المعياري

(١١) الجدول التالي يبين درجات أحد الطلاب في مادة الرياضيات خلال العام الدراسي :

الشهر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير	مارس	أبريل
الدرجة	٣٦	٤٠	٤٢	٣٨	٤٦	٤٤

أوجد الانحراف المعياري للدرجات

أحمد الشنتوي

(١٢) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمى بالعينة

[العشوائية ، الطبقيّة ، العمدية ، العنقودية]

[٢] الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو

[المدى ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الانحراف المعياري]

[٣] إذا كان : $\text{م.ج} = (\bar{x} - s) = 36$ لمجموعة من القيم عددها

٩ فإن : $\sigma = \dots$ [٢٧ ، ١٨ ، ٤ ، ٢]

[٤] الوسط الحسابي لمجموعة القيم : ٧ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩

هو [٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢]

[٥] المدى لمجموعة القيم : ٨ ، ٣ ، ١٠ ، ٥ ، ١٢

هو [٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٠]

[٦] الجذر التربيعي الموجب الموجب لمتوسطات مربعات انحرافات القيم

عن وسطها الحسابي يسمى

[المدى ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الانحراف المعياري]

[٧] إذا كانت ٧٨ هي أكبر مفردات مجموعة ما و كان المدى يساوي

٣٩ فإن أصغر مفردات هذه المجموعة يساوي

[٢ ، ٤ ، ٣٩ ، ٧٨]

[٨] إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية في القيمة فإن :

[$\bar{x} = s$ ، $\sigma = s$ ، $s - \bar{x} < 0$ ، $s - \bar{x} > 0$]

[٩] أبسط و أسهل مقياس للتشتت هو

[المدى ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال]

[١٠] إذا كان : التشتت لمجموعة من القيم يساوي صفراً فإن :

[الاختلاف يكون صغيراً ، الاختلاف يكون كبيراً ،

جميع المفردات تكون متساوية في القيمة ،

الوسط الحسابي لها يساوي صفراً]

[١١] الطريقة الوحيدة المستخدمة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة

هي

[أسلوب الحصر الشامل ، أسلوب العينات ،

أسلوب الاختيار المتحيز ، أسلوب الاستبيان]

[١٢] العينة التي لا تمثل المجتمع تمثيلاً جيداً تسمى بالعينة

[العشوائية ، الطبقيّة ، العمدية ، المتحيزة]

[١٣] إذا تم أخذ عينة طبقية قدرها ٥٠ ثلجة لفحصها من بين ٢٠٠

ثلجة من النوع (٢) ، ٣٠٠ ثلجة من النوع (ب) فإن عدد

مفردات النوع (ب) في العينة يساوي

[١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠]

[١٤] أكثر المجموعات التالية تشتتاً هي المجموعة

[{ ٢٨ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠ } ،

{ ٣١ ، ٣٥ ، ٢٦ ، ٣٧ ، ٤١ } ،

{ ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧ } ،

[{ ٢٠ ، ١٩ ، ٣٩ ، ٣٧ ، ٤٣ }]

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

الدرس الأول : النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستيني للزاوية :
نعلم أن :

١] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة

حول نقطة = 360°

و إذا قسمت هذه الزاوية إلى
أربعة أرباع متساوية فإن الربع
الواحد يحتوى على 90°
(زاوية قائمة)

٢] الدرجة هي وحدة القياس الستيني

كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالي :

الدرجة = $60'$ دقيقة ($1^\circ = 60'$) ،

الدقيقة = $60''$ ثانية ($1' = 60''$)

لاحظ : 62° درجة ، $25'$ دقيقة ، $3''$ ثانية تكتب : $62^\circ 25' 3''$

تحويل الدقائق و الثواني إلى أجزاء من الدرجة :

يمكن تحويل الدقائق و الثواني إلى أجزاء من الدرجة بإحدى الطريقتين :

١] لتحويل $36^\circ 12' 36''$ إلى أجزاء من الدرجة نتبع ما يلي :

نحول $12'$ إلى درجات : $12' = \frac{12}{60} = 0,2^\circ$

نحول $36''$ إلى دقائق ثم إلى درجات :

$$36^\circ = \frac{36}{60} = 0,6^\circ , 0,6^\circ = \frac{6}{10} = 0,6^\circ$$

$$\therefore 36^\circ 12' 36'' = 36^\circ + 0,2^\circ + 0,6^\circ = 36,8^\circ$$

٢] تستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي :

36	0,00	12	0,00	36	0,00	=	0,00
----	------	----	------	----	------	---	------

و الناتج هو : $36,8^\circ$

تحويل كسور الدرجة إلى دقائق و ثوان :

يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق و ثوان باستخدام الآلة الحاسبة :
فمثلاً :

لتحويل $78,18^\circ$ لدرجات و دقائق و ثوان تستخدم المفاتيح التالية :

78,18	0,00	=
-------	------	---

فيكون الناتج : $78^\circ 10' 48''$

١] أكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات باستخدام الآلة الحاسبة :

$$[1] \quad \dots = 41^\circ 18'$$

$$[2] \quad \dots = 8^\circ 38' 80''$$

٢] أكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات و الدقائق و الثواني

باستخدام الآلة الحاسبة :

$$[1] \quad \dots = 29,6^\circ$$

$$[2] \quad \dots = 57,246^\circ$$

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

الشكل المقابل : يمثل المثلث Δ ب د ح القائم الزاوية في ب
حيث : Δ ، د زاويتان حادثتان متتامتان
يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة ب بالوتر ،
يسمى الضلع المقابل لأي منهما بالمقابل ،
يسمى الضلع المجاور لأي منهما بالمجاور
لاحظ أن :

بالنسبة لزاوية د : المقابل هو $(\overline{ب د})$ ، و المجاور هو $(\overline{ب د})$
بالنسبة لزاوية ب : المقابل هو $(\overline{ب د})$ ، و المجاور هو $(\overline{ب د})$

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة هي :

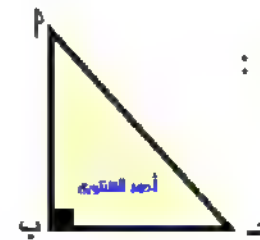
النسبة المثلثية	الرمز	
	بالعربية	بالإنجليزية
[١] جيب الزاوية	حا	sin
[٢] جيب تمام الزاوية	حتا	cos
[٣] ظل الزاوية	طا	tan

ففي الشكل المقابل :

 Δ ب د ح فيه : $\angle ب = 90^\circ$ فيكون :

$$\text{حا} = \frac{ب}{د} ، \text{حتا} = \frac{د}{ب} ، \text{طا} = \frac{ب}{د}$$

$$\text{طا} = \frac{ب}{د} ، \text{حا} = \frac{د}{ب} ، \text{حتا} = \frac{د}{ب} ، \text{طا} = \frac{ب}{د}$$



فمثلاً :

في الشكل المقابل :

$$\Delta ب د ح فيه : \angle ب = 90^\circ ، \text{سم} ٥ = ح ، \text{سم} ٣ = د ، \text{سم} ٤ = ب$$

$$\text{سم} ٥ = ح ، \text{سم} ٣ = د ، \text{سم} ٤ = ب$$

$$\text{حا} = \frac{ب}{د} = \frac{٤}{٣} ، \text{حتا} = \frac{د}{ب} = \frac{٣}{٤} ، \text{طا} = \frac{ب}{د} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{حا} = \frac{ب}{د} = \frac{٤}{٣} ، \text{حتا} = \frac{د}{ب} = \frac{٣}{٤} ، \text{طا} = \frac{ب}{د} = \frac{٤}{٣}$$



تذكر :

نظرية فيثاغورث :

في $\Delta ب د ح$:إذا كان : $\angle ب = 90^\circ$ فإن :

$$(\overline{ب د})^2 + (\overline{ب ح})^2 = (\overline{د ح})^2$$

$$(\overline{ب د})^2 - (\overline{ب ح})^2 = (\overline{د ح})^2$$

$$(\overline{ب د})^2 - (\overline{د ح})^2 = (\overline{ب ح})^2$$

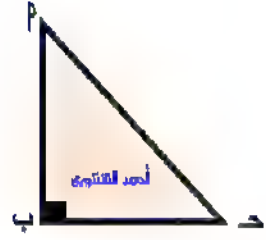
فمثلاً :

(١) إذا كان : $\Delta ب د ح$ فيه : $\angle ب = 90^\circ$ ، $\text{سم} ٣ = د$ ، $\text{سم} ٤ = ب$ فإن :

$$(\overline{ب د})^2 + (\overline{ب ح})^2 = (\overline{د ح})^2 \quad \therefore ٩ + ١٦ = ٢٥ \quad \therefore \text{سم} ٥ = د ح$$

(٢) إذا كان : $\Delta ب د ح$ فيه : $\angle ب = 90^\circ$ ، $\text{سم} ١٣ = د$ ، $\text{سم} ١٢ = ب$ فإن :

$$(\overline{ب د})^2 + (\overline{ب ح})^2 = (\overline{د ح})^2 \quad \therefore ١٦٩ + ١٤٤ = ٣١٣ \quad \therefore \text{سم} ١٧ = د ح$$



أحمد الشنتوي

(٣) Δ م ب د فيه : ق (ب) $\angle = 90^\circ$ ،

م ب = ٦ سم ، ب د = ٨ سم

[١] أوجد : طول م د

[٢] أوجد : طا م ، طا د

[٣] أثبت أن : حام م حتا د + حتا م حاد د = ١

[٤] أوجد : حتا م + حا م

(٤) Δ س ص ع فيه : ق (ص) $\angle = 90^\circ$ ،

س ع = ٢٥ سم ، س ص = ٢٤ سم

[١] أوجد : طول ع ص

[٢] أوجد : حا ع ، حتا س

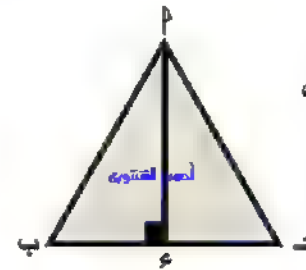
[٣] أوجد : حتا ع حتا س - حا ع حا س

[٤] أوجد : ١ - طا ع

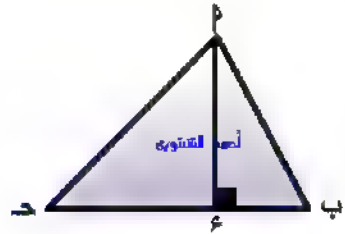


أحمد الشنتوري

(٥) في الشكل المقابل :

 ΔPBD فيه : $PB = PD = 10$ سم ،ب $D = 12$ سم ، $PE \perp BD$ [١] أثبت أن : $\angle B + \angle D < 180^\circ$ [٢] أثبت أن : $\angle B + \angle D = 180^\circ$

(٦) في الشكل المقابل :

 ΔPBD فيه : $PB = 13$ سم ، $PD = 10$ سم ، $BE = 9$ سم ، $PE \perp BD$

أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار :

$$\frac{\text{طا}(\angle BPD) + \text{طا}(\angle BDE)}{\text{طا}(\angle BDE) - \text{طا}(\angle BPD)}$$

أحمد الشنتوي

(٧) $\triangle PDC$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه : $PD \parallel PC$ ،

$PD = PC = 5$ سم ، $PD = PC = 12$ سم

أثبت أن : $\frac{5}{3} = \frac{\text{طاب حقا ح}}{\text{حأ ح} + \text{حأ ب}}$

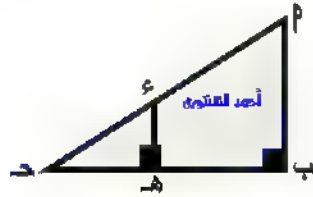
(٨) في الشكل المقابل :

$\triangle PDC$ فيه : $\angle C = 90^\circ$ ،

، $PD \perp PC$ ، $PD = 9$ سم ،

$PD = 3$ سم ، $PD = 4$ سم

أوجد : طول \overline{PD} ، مساحة $\triangle PDC$



أحمد الشنتوري

(٩) في أي Δ ABC قائمة الزاوية في B أثبت أن :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(١١) Δ ABC قائمة الزاوية في B ، فإذا كان : $\cos A = \frac{1}{2}$

أوجد قيمة : $\sin A$ حتماً

أحمد الشنتوي

(١٠) Δ ABC قائمة الزاوية في B ، فإذا كان : $\cos A = \frac{1}{2}$

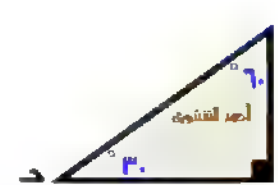
أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية C

(١٢) Δ ABC قائمة الزاوية في B ، فإذا كان : $\cos A = \frac{1}{2}$

أثبت أن : $\sin A = \frac{1}{2}$ حتماً

الدرس الثاني : النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

أولاً : النسب المثلثية للزاويتين 30° ، 60° :
 في الشكل المقابل :



Δ ب ح قائم الزاوية في ب فيه :

$$^{\circ} 3. = (\supset \supset) \vee, \quad ^{\circ} 6. = (p \supset) \vee$$

لذلك يسمى Δ بـ Δ (مثلث ثلاثيني ستيني)

٣. طول الضلع المقابل للزاوية θ في المثلث القائم الزاوية

يساوي نصف طول الوتر $\therefore \mu = \frac{1}{2} \mu$ ح

أى أن : $\mu = \mu_2 = \mu_1$

و بفرض أن : $\mu = l$ وحدة طول

فإن : $\mu = \frac{1}{2}$ وحدة طول

$$r_{\mathcal{D}\mathcal{P}} = r_{\mathcal{D}} - r_{\mathcal{D}\mathcal{Z}} = r_{(\neg \mathcal{P})} - r_{(\neg \mathcal{P})} = r_{(\neg \mathcal{P})} \therefore$$

∴ $\text{ب.ح} = \sqrt[3]{\text{ل}}$ وحدة طول

لأى أن : $p : p : p = 1 : \sqrt{3} : 2$

و بالتالى يمكن استنتاج النسب المثلثية للزاويتين 30° ، 60° كالتالى :

ح. م. = $\frac{1}{r}$ ، ح. م. = $\frac{\sqrt{r}}{r}$ ، ط. م. = $\frac{1}{\sqrt{r}}$

ح. ج. = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ح. ب. = $\frac{1}{2}$ ، ط. ا. = $\sqrt{3}$

ثانياً : النسب المثلثية للزاوية 40° :

في الشكل المقابل :

٨٢ ب ح قائم الزاوية في ب فيه :

ح پ = پ م

$$^o 10 = (\rightarrow \Delta) \mathcal{V} = (\leftarrow \Delta) \mathcal{V} \therefore$$

و بفرض أن : $\mu = \beta = \gamma = \dots = 1$ وحدة طول

$$r_{\neg p} = r_p + r_{\neg p} = r_{(\neg p)} + r_{(p \vee \neg p)} = r_{(p \vee \neg p)} \therefore$$

$\therefore \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$

و بالتالى يمكن استنتاج النسب المثلثية للزاوية 40° كالتالى :

حاصل $\frac{1}{r} = 20^\circ$ ، حقا $\frac{1}{r} = 20^\circ$ ، طا $1 = 20^\circ$

ويمكن وضع النسب المثلثية السابقة في جدول كالتالي :

قياس الزاوية	النسبة	٣٠°	٦٠°	٩٠°
حز	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
حقا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
طا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{r}} \quad , \quad \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{r}} : \text{by}$$

ملاحظات :

١١] **هَمَّا سَبَقَ نَجْدَ أَنْ :**

جيب أى زاوية يساوى **جيب تمام** الزاوية المتممة لهذه الزاوية
و العكس صحيح

و العكس صحيح

فمثلاً: $\text{ح.ا.}^{\circ} = \text{ح.ا.}^{\circ}$ ، $\text{ح.ا.}^{\circ} = \text{ح.ا.}^{\circ}$ ، $\text{ح.ا.}^{\circ} = \text{ح.ا.}^{\circ}$

٥ حأ = ٥ حأ

و بالتالى :

إذا كان : $u = (u_1, u_2) + (u_3, u_4)$

فإن : ح ا م = ح ت ا ب ، ح ت ا م = ح ا ب ، و العكس صحيح
فإذا كان : م > م ، ب حادثين ، كان : ح ا م = ح ت ا ب أو

فَإِذَا كَانَ : م ، ب حادثين ، كَانَ : حَا م = حَتَاب أَوْ

حَتَا ۛ = حَاب ۛ فَإِنْ : ۛ (ۛ) + ۛ (ۛ) = ۛ ۛ ۛ

٢] لأي زاوية μ يكون : $\mu = \frac{\mu_{\text{حاجا}}}{\mu_{\text{حقا}}}$

فمثلاً:

$$(1) \text{ حنا } 6. \text{ ح } 3. + \text{ طا } 10. + \text{ ح } 3. =$$

$$r = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} \right) + 1 + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$$

(٢) لإيجاد قيمة θ حيث θ قياس زاوية حادة ،

٢ حاس = طا^٢ ٦٠° - ٢ طا ٤٥° فإن :

$$1 = r - 3 = 1 \times r - 1(\sqrt{3}) = 1 \text{ حاس } r$$

∴ $\frac{1}{r} = \text{حاصل}$ ∴ $\frac{1}{r} = \text{م.س.}$

(1) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يلي :

[11] طا 20 ° × ح ا . م °

[2] $\text{ح}^{\text{ا}} 40 + \text{ح}^{\text{ا}} 40$

[3] $\text{ح. 3. حقا} + \text{ح. 1. حا} = \text{ح. 4. حقا}$

[4] $\text{ح} 40^\circ \text{ح} 40^\circ + \text{ح} 3^\circ \text{ح} 6^\circ - \text{ح} 3^\circ$

$$(\text{حنا}^{\circ 6} - \text{حنا}^{\circ 3})(\text{حنا}^{\circ 6} + \text{حنا}^{\circ 3}) \quad [0]$$

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت كلاً مما يلي :

$$[1] \text{ حـ } 60^\circ = 2^\circ \text{ حـ } 30^\circ \text{ حتـ } 30^\circ$$

$$[2] \text{ حتـ } 60^\circ = 2^\circ \text{ حـ } 30^\circ - 1^\circ$$

$$[3] \text{ حتـ } 60^\circ = \text{حتـ } 30^\circ - \text{حـ } 30^\circ$$

$$[4] 2^\circ \text{ حـ } 40^\circ - 1^\circ = 1^\circ - 2^\circ \text{ حـ } 40^\circ$$

$$[5] \text{ حـ } 30^\circ \text{ حتـ } 40^\circ = \frac{\text{حـ } 30^\circ \text{ حتـ } 40^\circ + \text{حـ } 40^\circ \text{ حتـ } 30^\circ}{\text{حـ } 60^\circ \text{ حتـ } 40^\circ + \text{حـ } 40^\circ \text{ حتـ } 60^\circ}$$

أحمد الشنتوري

(٣) أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة في كل مما يلي :

$$[1] \text{ حـ } 2^\circ = 3^\circ \text{ حـ } 30^\circ \text{ حتـ } 30^\circ$$

$$[2] \text{ طـ } 3^\circ = 4^\circ \text{ حـ } 30^\circ \text{ حتـ } 60^\circ \text{ طـ } 40^\circ$$

$$[3] \text{ حـ } 3^\circ = 60^\circ \text{ حتـ } 30^\circ - \text{حتـ } 60^\circ \text{ حـ } 30^\circ$$

$$[4] 2^\circ \text{ حـ } 3^\circ = 60^\circ \text{ حتـ } 30^\circ + \text{حتـ } 60^\circ \text{ حـ } 30^\circ$$

$$[5] \text{ حـ } 30^\circ - \text{طـ } 3^\circ = 60^\circ \text{ حتـ } 30^\circ - 4^\circ \text{ حتـ } 40^\circ \text{ حـ } 40^\circ$$

(٤) أوجد قيمة س في كل مما يلي :

[١] $٤٠^\circ \text{ طا } ٣^\circ \text{ حتا } ٣^\circ \text{ طا } ٤٠^\circ$

[٢] $٣^\circ \text{ س حا } ٣^\circ = ٦^\circ \text{ حتا } ٣^\circ + ٦^\circ \text{ حتا } ٣^\circ$

[٣] $٣^\circ \text{ س حا } ٣^\circ \text{ حتا } ٤٠^\circ = ٣^\circ \text{ حتا } ٤٠^\circ \text{ طا } ٤٠^\circ$

[٤] $٤٠^\circ \text{ س حا } ٤٠^\circ \text{ حتا } ٤٠^\circ \text{ طا } ٦^\circ = ٤٠^\circ \text{ طا } ٦^\circ \text{ حتا } ٦^\circ$

(٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥

فإن القياس الستيني للزاوية الصغرى =

[$١٥^\circ / ٥٦^\circ$ ، $٥٦^\circ / ١٥^\circ$ ، $٣٣^\circ / ٤٥^\circ$ ، $٤٥^\circ / ٣٣^\circ$]

[٢] إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥

فإن القياس الستيني للزاوية الكبرى =

[$١٠٢^\circ / ٣^\circ$ ، $٧٦^\circ / ٣^\circ$ ، $١١٢^\circ / ٣^\circ$ ، $٦٧^\circ / ٣^\circ$]

[٣] إذا كان : حتا ٢ س = $\frac{1}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة

فإن : \angle (س) =

[١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°]

[٤] إذا كان : حتا س = ٣° حيث س قياس زاوية حادة

فإن : \angle (س) =

[١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°]

[٥] إذا كان : طا $\frac{2}{3}$ س = ١ حيث س قياس زاوية حادة

فإن : \angle (س) =

[١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°]

[٦] إذا كان : طا ٣ س = $\sqrt{3}$ حيث س زاوية حادة

فإن : \angle (س) =

[١° ، ٢° ، ٤° ، ٦°]

أحمد الشنتوري

[١٥] إذا كان : Δ س ص ع قائم الزاوية في ع ، س ص = ٢٥ سم

، ص ع = ٧ سم فإن : حاس + حتا ص =

[$\frac{31}{5}$ ، $\frac{17}{5}$ ، ٢ ، ١]

[١٦] إذا كان : Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، س ص = ٥ سم

، س ع = ١٣ سم فإن : ٢ حاس طا س - حاع =

[$\frac{7}{13}$ ، $\frac{19}{13}$ ، ٢ ، ١]

[١٧] إذا كان : Δ ب د ب د قائم الزاوية في ب ، ب د = ٢٠ سم ،

ب د = ١٥ سم فإن : حتا د حتا ب - حاد حاب =

[صفر ، ١ ، $\frac{26}{15}$ ، $\frac{28}{15}$]

[١٨] إذا كان : Δ ب د ب د قائم الزاوية في ب ، ب د = ٨ سم ،

ب د = ١٥ سم فإن : ٢ حتا ب - حاد طا ب =

[صفر ، ١ ، ١٧ ، $\frac{1}{17}$]

[١٩] في Δ ب د ب د قائم الزاوية في ب يكون : حا ب + حتا ب

[$<$ ، $=$ ، $>$ ، \geq]

[٧] إذا كان : حتا (س + ١٠°) = $\frac{1}{5}$ حيث (س + ١٠°)

زاوية حادة فإن : (س - ١٠°) =

[٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠]

[٨] ٤ حتا ٣٠° طا ٦٠° =

[٣ ، $\sqrt{2}$ ، ٦ ، ١٢]

[٩] حا ٦٠° - حتا ٦٠° =

[صفر ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١]

[١٠] ٢ حتا ٣٠° حتا ٣٠° =

[حا ٦٠° ، حتا ٦٠° ، طا ٦٠° ، ٢ حا ٦٠°]

[١١] طا ٤٥° حا ٣٠° =

[$\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ١]

[١٢] حا ٦٠° + حتا ٣٠° + طا ٦٠° =

[$\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$]

[١٣] في Δ ب د ب د قائم الزاوية في ب يكون : حا ب + حتا ب =

[٢ حاد ، ٢ حاب ، ٢ حتا ب ، ٢ حا ب]

[١٤] إذا كان : Δ ب د ب د قائم الزاوية في ب ، ب د = ٣ سم

، ب د = ٤ سم فإن : حا ب حتا ب =

[١ ، $\frac{9}{16}$ ، $\frac{15}{16}$ ، $\frac{17}{16}$]

للأمانة العلمية
يرجى عدم حذف أسمي نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أي تعديل

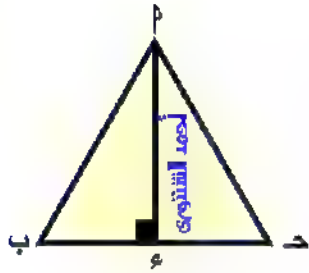
[٣] إذا كان : طاس = 1,0101 تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

shift	tan	1,0101	=	0,...
-------	-----	--------	---	-------

فيكون : س = 09° 34' 06"

فمثلاً :

في الشكل المقابل :



ΔABC فيه : $\angle B = \angle C = 90^\circ$ سم ،

$BC = 6$ سم ، $AC \perp BC$ ،

لإيجاد : $\angle A$ (ب) ، طول AB

نتبع ما يلي :

ΔABC فيه : $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ،

$AC \perp BC$ $\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ$ سم ، $BC = 6$ سم

من ΔABC يكون : $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ،

$\therefore \angle A = (ب) = 09^\circ 34' 06''$ ، $\angle C = 90^\circ$ حاب

$\therefore \angle A = 09^\circ 34' 06'' \times 0 = 0$ سم

و بطريقة أخرى :

$\frac{AC}{BC} = \tan A$ $\therefore \angle A = 09^\circ 34' 06'' \times 3 = 0$ سم

و بطريقة ثالثة :

$$16 = 9 - 20 = \angle(ب) - \angle(ح) = \angle(ع)$$

$\therefore \angle ع = 0$ سم

إيجاد النسب المثلثية لزاوية معروفة :

[١] لإيجاد : $\sin 02^\circ$

تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

فيكون : $\sin 02^\circ = 0,0349$ تقريباً لأربعة أرقام عشرية

[٢] لإيجاد : $\cos 17^\circ 3'$ حتا

تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

فيكون : $\cos 17^\circ 3' = 0,9848$ تقريباً لأربعة أرقام عشرية

[٣] لإيجاد : $\tan 20^\circ 16' 05''$ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

tan	0,	0,...	16	0,...	20	0,...	=
-----	----	-------	----	-------	----	-------	---

فيكون : $\tan 20^\circ 16' 05'' = 0,3670$ تقريباً لأربعة أرقام عشرية

إيجاد قياس الزاوية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها :

[١] إذا كان : حاس = $-0,6478871$ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

shift	sin	-0,6478871	=	0,...
-------	-----	------------	---	-------

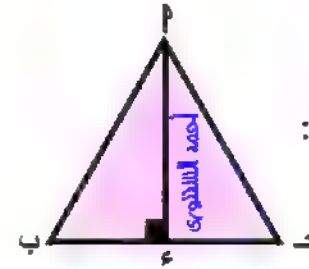
فيكون : س = 40°

[٢] إذا كان : حتا = $-0,6846$ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

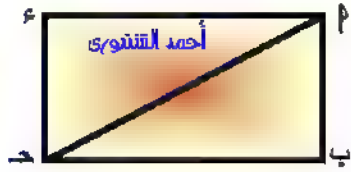
shift	cos	-0,6846	=	0,...
-------	-----	---------	---	-------

فيكون : س = $40^\circ 17' 20''$

(٦) في الشكل المقابل :

 ΔPBD فيه : $PD = PB = 8$ سم ، $BD = 12$ سم ، $PM \perp BD$ ، أوجد :و (ΔPBD) ، مساحة ΔPBD 

(٨) في الشكل المقابل :

 ΔPBD مستطيل فيه : $PD = 24$ سم، و (ΔPBD) $\angle D = 20^\circ$ أوجد :طول BD 

أحمد الشنتوي

(٧) في الشكل المقابل :

 ΔPBD مستطيل فيه : $PD = 10$ سم $BD = 20$ سم أوجد :و (ΔPBD) ، مساحة المستطيل PBD (٩) سلم PB طوله ٦ أمتار يستند طرفه P على حائط رأسي و طرفه B على أرض أفقية ، فإذا كانت D هي مسقط P على سطح الأرض ، وكان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض 60° أوجد طول BD

(١٠) في الشكل المقابل :



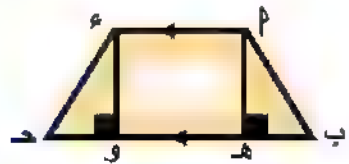
ABCD متوازي أضلاع مساحته ٩٦ سم^٢

BE ⊥ BC ، BE : BC = ٣ : ١

BE = ٨ سم أوجد : طول BE ،

و (∠B) ، طول AB

(١١) في الشكل المقابل :



ABCD شبه منحرف فيه :

BE = BC = ٥ سم ،

BE = ١١ سم ، BE ⊥ BC ، EH ⊥ BC ، EH // AD

أوجد : (∠B) ، (∠A) ،

مساحة شبه المنحرف ABCD

أحمد الشنتوي

الوحدة الخامسة

الهندسة التحليلية

الدرس الأول : البعد بين نقطتين

تمهيد : نعلم أن :

المسافة بين نقطتين على خط مستقيم (أفقي أو رأسي) =
| عدد نقطة النهاية - عدد نقطة البداية |

و بالتالي :

المسافة بين نقطتين على محور السينات (أو أي مستقيم يوازيه)
= | الإحداثي السيني نقطة النهاية - الإحداثي السيني نقطة البداية |
المسافة بين نقطتين على محور الصادات (أو أي مستقيم يوازيه)
= | الإحداثي الصادي نقطة النهاية - الإحداثي الصادي نقطة البداية |

فمثلاً :

من الشكل المقابل :

$$b = | 3 - (1 -) | = | 4 - |$$

∴ b = 4 وحدة طول

$$b = | 3 - | = | 2 - (1 -) | =$$

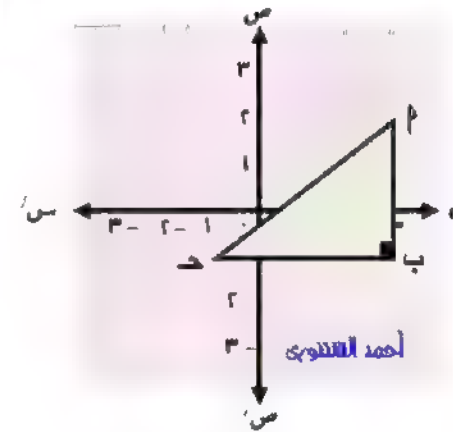
∴ b = 3 وحدة طول

لاحظ :

Δ b ب قائم الزاوية في ب

$$\therefore (b)^2 = 9 + 16 = 25$$

∴ b = 5 وحدة طول



وبصفة عامة :

إذا كانت : م (س_١ ، ص_١) ،ن (س_٢ ، ص_٢) نقطتين في

المستوى فإن :

$$d = | x_2 - x_1 | \text{ و } d =$$

$$| y_2 - y_1 |$$

$$d = | x_2 - x_1 | \text{ و } d =$$

$$| y_2 - y_1 |$$

∴ Δ م ن قائم الزاوية في ن

$$\therefore (d)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورث)}$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore d = \sqrt{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 }$$

البعد بين النقطتين (س_١ ، ص_١) ، (س_٢ ، ص_٢) =

$$\sqrt{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 }$$

البعد بين النقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$

أحمد الشنتوي

فمثلاً :

(١) البعد بين النقطتين م (٧ ، ١) ، ب (٠ - ، ٤ -) هو :

$$م ب = \sqrt{(٧ - (٠ -)) + (١ - (٤ -))}$$

$$= \sqrt{(١٢ -) + (٥ -)} = \sqrt{١٧٩} \text{ وحدة طول}$$

(٢) إذا كان البعد بين النقطتين م (٧ ، ١) ، ب (٠ - ، ٤ -) هو :

يساوي ١٣ وحدة طول ، لإيجاد قيمة ٤ نتبع ما يلي :

$$١٣ = م ب \therefore (١٣)^2 = (م ب)^2$$

$$\therefore ١٦٩ = (٧ - (٠ -)) + (١ - (٤ -))$$

$$\therefore ١٦٩ = ١٤٤ + (١ - ٤)$$

$$\therefore (١ - ٤) = ٢٥ \text{ ، بأخذ الجذر التربيعي لطرفين ينتج :}$$

$$١ - ٤ = ٢٥ \text{ ومنها : } ٦ = ٤$$

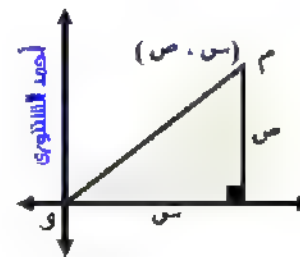
$$\text{أو : } ١ - ٤ = ٢٥ \text{ ومنها : } ٤ - = ٢٥$$

ملاحظات :

(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : م (س ، س) ،
و (٠ ، ٠) نقطة الأصل فإن :

$$وم = \sqrt{س^2 + س^2}$$



(٢) لإثبات أن أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة نوجد البعد بين

كل نقطتين ثم أن أكبر بعد يساوي مجموع البعدين الآخرين

(٣) لإثبات أن : النقط م ، ب ، د هي رؤوس مثلث نوجد : م ب ، ب د ، د م

، ثم نثبت أن : مجموع أصغر بعدين أكبر من البعد الثالث

(٤) لإثبات أن : $\Delta م ب د$ قائم الزاوية في ب نثبت أن :

$$(م ب)^2 = (م د)^2 + (ب د)^2$$

(٥) لإثبات أن : $\Delta م ب د$ منفرج الزاوية في ب نثبت أن :

$$(م ب)^2 > (م د)^2 + (ب د)^2$$

(٦) لإثبات أن : $\Delta م ب د$ حاد الزاوية في ب نثبت أن :

$$(م ب)^2 < (م د)^2 + (ب د)^2$$

(٧) لإثبات أن الشكل الرباعي م ب د ع متوازي أضلاع :

نثبت أن : م ب = د ع ، ب د = م ع

(٨) لإثبات أن الشكل الرباعي م ب د ع مستطيل :

نثبت أن : م ب = د ع ، ب د = م ع ، م ب = د ع ، ب د = م ع

(٩) لإثبات أن الشكل الرباعي م ب د ع مربع :

نثبت أن : م ب = د ع = ب د = م ع ، م ب = د ع ، ب د = م ع ، م ب = د ع

(١٠) لإثبات أن الشكل الرباعي م ب د ع معين :

نثبت أن : م ب = د ع = ب د = م ع ، م ب = د ع ، ب د = م ع ، م ب = د ع

(١١) لإثبات أن : النقط م ، ب ، د ، ع تقع على دائرة مركزها م :

نثبت أن : م م = م ب = م د = م ع

فمثلاً :

لإثبات أن : الشكل الرباعي م ب د ع حيث م (١، ٠) ، ب (٠، ٤) ، د (٨، ١) ، ع (٤، ٣-) مستطيل و إيجاد مساحته نتبع التالي :

$$م ب = \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{2} \times 4 = \text{وحدة طول} ،$$

$$م د = \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{2} \times 3 = \text{وحدة طول} ،$$

$$م ع = \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{2} \times 4 = \text{وحدة طول} ،$$

$$م ب = \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{2} \times 3 = \text{وحدة طول} ،$$

$$م د = \sqrt{29+1} = \sqrt{30} = \text{وحدة طول} ،$$

$$م ع = \sqrt{29+1} = \sqrt{30} = \text{وحدة طول} ،$$

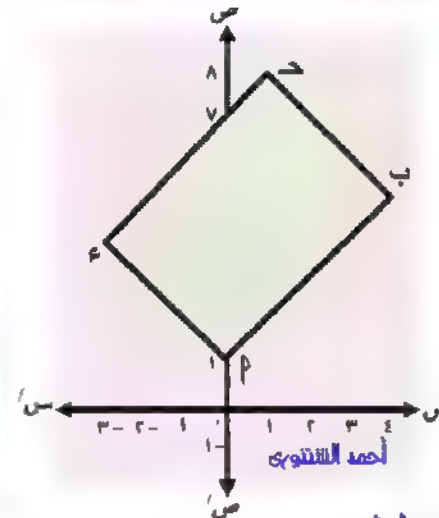
$$م ب = د ع ، م د = ب ع ، م ع = ب د ،$$

∴ الشكل الرباعي م ب د ع مستطيل

مساحة المستطيل م ب د ع = م ب × ب د

$$= \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{2} \times 4 =$$

$$= 24 \text{ وحدة مساحة}$$



أحمد الشنتوي

(١) أثبت أن النقط : م (٣، ٤) ، ب (١، ١) ، د (٠، ٥-) تقع على استقامة واحدة

(٢) إذا كان : م (١، ١) ، ب (١، ٢) ، د (٣، -٢) بين نوع Δ م ب د بالنسبة لزاياه

(٣) إذا كان : Δ ب د قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته
 أثبت أن : Δ ب د قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته

(٥) إذا كان : Δ ب د قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته
 أثبت أن الشكل ب د ع مستطيل و أوجد مساحته

أحمد الشنتوري

(٤) إذا كان : Δ ب د متساوي الساقين
 أثبت أن : Δ ب د متساوي الساقين

(٦) إذا كان : Δ ب د متساوي الساقين
 أثبت أن الشكل ب د ع متوازي أضلاع

(٧) إذا كان : $\text{م} (٤, ٢)$ ، $\text{ب} (-٣, ٠)$ ، $\text{د} (-٧, ٥)$ ، $\text{ع} (-٢, ٩)$
 أثبت أن الشكل م ب د ع مربع ثم أوجد مساحته

(٩) أثبت أن النقط : $\text{م} (٣, -١)$ ، $\text{ب} (-٤, ٦)$ ، $\text{د} (٢, -٢)$ تقع
 على دائرة واحدة مركزها $\text{م} (-١, ٢)$ ثم محيط الدائرة حيث :
 $\pi = ٣,١٤$

أحمد الشنتوي

(٨) إذا كان : $\text{م} (٥, ٣)$ ، $\text{ب} (٦, -٢)$ ، $\text{د} (١, -١)$ ، $\text{ع} (٠, ٤)$
 أثبت أن الشكل م ب د ع معين ثم أوجد مساحته

(١٠) إذا كان : $\text{م} (٣, ٣)$ ، $\text{ب} (٣, ٢)$ ، $\text{د} (٥, ١)$ ، $\text{و} (٠, ١)$ كان
 $\text{م ب} = \text{ب د}$ أوجد قيمة س

(II) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[1] البعد بين النقطتين (0,0) ، (12,5) يساوى

[٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٣]

[2] البعد بين النقطتين (2,2) ، (-1,6) يساوى

[2 ، ٥ ، ١٠ ، ٢٥]

[3] بعد النقطة (4,-3) عن محور السينات يساوى

[3- ، 3 ، 4 ، ٥]

[4] بعد النقطة (4,-3) عن محور الصادات يساوى

[4- ، 3 ، 4 ، ٥]

[5] إذا كانت دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها 2 وحدة طول

فإن : النقطة التي تنتمي لدائرة هي

[(1,2) ، (-1,2) ، (1,3) ، (1,2)]

[6] النقط (0,0) ، (0,3) ، (4,0) تكون

[رؤوس مثلث منفرج الزاوية ، رؤوس مثلث حاد الزوايا

، رؤوس مثلث قائم الزاوية ، على استقامة واحدة]

[7] النقط (3,-) ، (0,3) ، (3,0) هي رؤوس مثلث

[قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، مختلف الأضلاع

، متساوي الأضلاع ، منفرج الزاوية]

[8] إذا كان : البعد بين النقطتين (0,0) ، (1,0) هو وحدة طول

فإن : $p =$

[1- ، 1 ، 1± ، صفر]

أحمد الشنتوي

[9] في مستوى إحداثي متعامد النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل

مسافة 2 وحدة طول يمكن أن تكون

[(2,1) ، (1,2) ، (2,0) ، (0,3-)]

[10] إذا كان البعد بين النقطتين (0,0) ، (0,4) يساوى ٥ وحدة

طول فإن : ٤ يمكن أن تكون

[4- ، 3± ، 3 ، 4]

[11] إذا كان البعد بين النقطتين (2,0) ، (3,-1) يساوى

$\sqrt{17}$ وحدة طول فإن : ٤ يمكن أن تكون

[1- ، 2 ، 3 ، ١٧]

الدرس الثاني : إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تمهيد :

بملاحظ الشكل المقابل نجد أن :

ب (٢، ١) ، ب (٢، ٥) ، د (٤، ٥)

كما نلاحظ :

[١] م ب // محور السينات

م (٢، ٣) نقطة منتصفها

حيث : $\frac{0+4}{2} = 3$ $\frac{1+5}{2} = 3$

[٢] ب د // محور الصادات ، ن (٣، ٥) نقطة منتصفها

حيث : $(\frac{2+4}{2}, \frac{1+5}{2}) = (3, 5)$

[٣] ل (٣، ٣) نقطة منتصف م د

حيث : $(\frac{2+4}{2}, \frac{1+5}{2}) = (3, 3)$

استنتاج قانون إحداثي منتصف

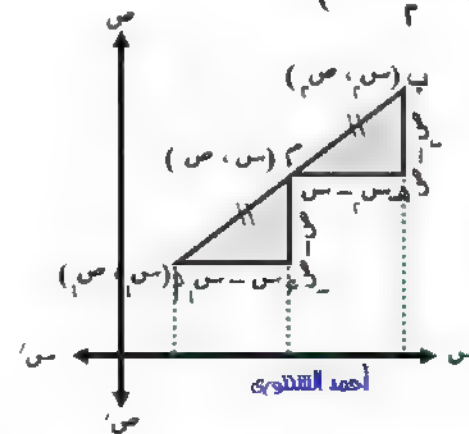
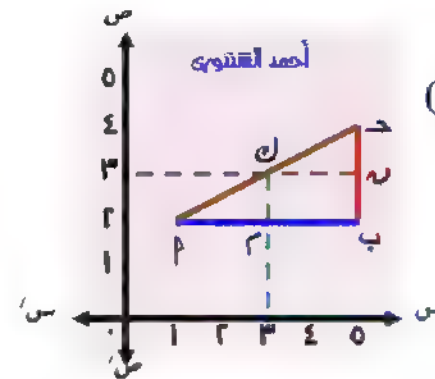
قطعة مستقيمة :

إذا كانت : م (س_١ ، ص_١) ،ب (س_٢ ، ص_٢) ، م (س_٣ ، ص_٣)

حيث م منتصف م ب

و من تطابق $\Delta م ب د$ ، ب د م

بالشكل المقابل نجد أن :



$$م = ع \quad \therefore س - س_1 = س_2 - س$$

$$\therefore س_2 + س_1 = س \quad \therefore \frac{س_2 + س_1}{2} = س$$

$$\text{بالمثل : } م = ب \quad \therefore ص - ص_1 = ص_2 - ص$$

$$\therefore ص_2 + ص_1 = ص \quad \therefore \frac{ص_2 + ص_1}{2} = ص$$

$$\therefore م \left(\frac{س_2 + س_1}{2}, \frac{ص_2 + ص_1}{2} \right)$$

فمثلاً :

(١) إذا كانت د منتصف م ب وكان م (٤، ١) ، ب (٢ - ، ٥ -)

فإن : د هي $(\frac{2-4}{2}, \frac{5-1}{2}) = (1, 2)$

(٢) إذا كانت د (١ - ، ٣) هي منتصف م ب حيث م (٣ - ، ٢)

لإيجاد إحداثي نقطة ب

نفرض أن : ب (س ، ص)

$$\therefore 3 = س + 2 \quad \therefore 1 = س + 3 - \quad \text{ومنها : } س = 1$$

$$\therefore 1 = 3 - ص + 3 - \quad \therefore 2 = ص + 3 - \quad \text{ومنها : } ص = 1$$

ب (١ ، ٤)

ملاحظات :

[1] إذا كانت M نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع $ABCD$ ،

فإن : M منتصف كل من القطرين AC ، BD ،

[2] لإثبات أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع نثبت أن :

M نقطة تقاطع قطريه منتصف كل من AC ، BD ،

[3] إذا كان : AE متوسط في $\triangle ABC$ فإن : E منتصف BC ،

[4] إذا كان : AB قطر في الدائرة M فإن : M منتصف AB ،

[5] إذا قسمت AB بالنقط : E ، H ، O (أربعة أجزاء متساوية في

الطول) يمكن اعتبار أن : E منتصف AB ، H منتصف EO ،

(1) أوجد إحداثي نقطة منتصف AB في كل مما يلي :

[1] $M(2, 4)$ ، $B(6, 0)$ ،

[2] $M(7, -6)$ ، $B(-1, 0)$ ،

(2) إذا كانت D منتصف AB أوجد S ، V في كل مما يلي :

[1] $M(S, 3)$ ، $B(6, V)$ ، $D(4, 6)$ ،

[2] $M(5, -3)$ ، $B(S, V)$ ، $D(6, -4)$ ،

[3] $M(S, -6)$ ، $B(9, -11)$ ، $D(-3, V)$ ،

(٣) إذا كانت $M(1, -6)$ ، $P(9, 2)$ أوجد إحداثيات النقط التى تقسم MP إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول

(٥) إذا كان : M ب د ع معين حيث $M(3, 2)$ ، $P(4, -2)$ ، $D(1, -1)$ ، $E(2, -3)$ أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه ، ثم أوجد مساحته

أحمد الشنتوري

(٤) إذا كان : M ب د ع متوازي أضلاع حيث $M(-3, 4)$ ، $P(5, -2)$ ، $D(1, -3)$ أوجد إحداثي E

(٦) أثبت أن النقط $M(6, 0)$ ، $P(2, -4)$ ، $D(-4, 2)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ثم أوجد إحداثي نقطة E التى تجعل الشكل M ب د ع مستطيلاً

(٧) أثبت أن النقط $P(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $D(-5, 1)$ هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ثم أوجد مساحته

[٤]

إذا كانت : $M(1, 2)$ هي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ حيث $P(2, 0)$ فإن : إحداثي D هي

[$(-2, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(0, 1)$]

[٥]

إذا كان : M متوسط في $\triangle ABC$ ، M منتصف AC حيث $P(0, 8)$ ، $B(3, 2)$ ، $D(-3, 6)$ فإن : إحداثي M هي

[$(4, 0)$ ، $(6, 0)$ ، $(0, 6)$ ، $(0, 4)$]

[٦]

إذا كانت : M ، B ، D ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة و كان : $MB = BD$ ، $P(1, 3)$ ، $D(5, 1)$ فإن : إحداثي B هي

[$(3, 2)$ ، $(6, 4)$ ، $(7, 0)$ ، $(-3, -2)$]

[٧]

إذا كانت : M ، B ، D ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة و كان : $MB = BD$ ، $P(3, 2)$ ، $B(5, 1)$ فإن : إحداثي D هي

[$(3, 2)$ ، $(6, 4)$ ، $(7, 0)$ ، $(-3, -2)$]

أحمد الشنتوري

(٨) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : \overline{AB} قطر في دائرة حيث $P(3, -5)$ ، $B(5, 1)$ فإن : مركز الدائرة هو

[$(2, 2)$ ، $(4, 2)$ ، $(-2, 4)$ ، $(8, -2)$]

[٢] إذا كانت النقطة $(0, 4)$ تنصف البعد بين النقطتين $(-1, 1)$ ، $(س, ص)$ فإن : النقطة $(س, ص)$ هي

[$(1, 9)$ ، $(-1, 9)$ ، $(-1, 3)$ ، $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$]

[٣] إذا كانت النقطة $(3, -1)$ هي منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(س, 2)$ ، $(ص, 10)$ فإن : $س + ص =$

[-2 ، -8 ، 2 ، 8]

الدرس الثالث : ميل الخط المستقيم

نعلم أن :

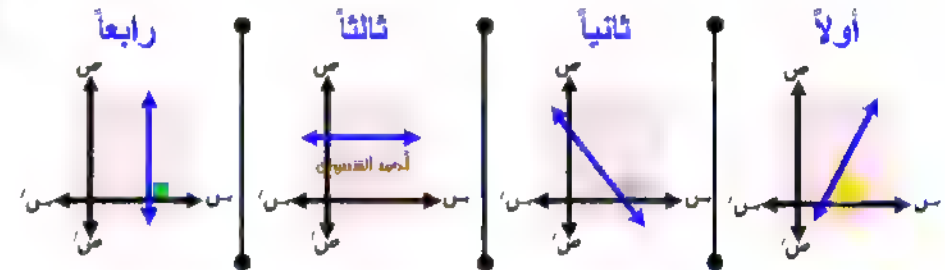
(١) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(س_١, ص_١)$ ، $(س_٢, ص_٢)$ يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث : $س_٢ > س_١$

فمثلاً :

المستقيم المار بالنقطتين $(١, ٢)$ ، $(٣, ٤)$ يكون :

$$ميله (٢) = \frac{٢ - ٤}{١ - ٣} = \frac{٢}{١}$$

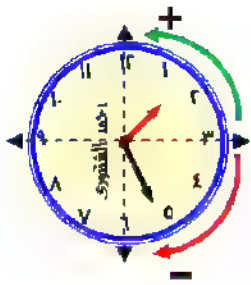
(٢) الخط المستقيم يأخذ أحد الأشكال التالية بحسب قيمة $(ص_٢ - ص_١)$



(٣) ميل أي مستقيم أفقي (موازي لمحور السينات) = صفر

(٤) ميل أي مستقيم رأسي (موازي لمحور الصادات) غير معرف

القياس الموجب و القياس السالب للزاوية :
تكون الزاوية موجبة إذا كانت مأخوذة في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ، و تكون الزاوية سالبة إذا كانت مأخوذة في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة



ففي الشكل المقابل :

المستقيم ل يصنع الزاويتين المتكاملتين هـ ، و مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و تكون : هـ موجبة
أي : و (هـ) موجبة ،
لـ سالبة أي : و (لـ) سالبة



فمن الأشكال السابقة نستنتج :

الشكل	ميل الخط المستقيم	قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
أولاً	موجب (أكبر من الصفر)	حادّة
ثانياً	سالب (أصغر من الصفر)	منفرجة
ثالثاً	يساوي صفراً	صفريّة
رابعاً	غير معرف	قائمة

تعريف :

ميل الخط المستقيم :

هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
 أي أن : ميل الخط المستقيم = $\tan \alpha$
 حيث : α الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فمثلاً :

[١] إذا كان : ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات زاوية قياسها $25^\circ 46' 0''$ فإن : ميل المستقيم = $\tan 25^\circ 46' 0''$ ، و باستخدام الآلة الحاسبة يكون : $\tan 25^\circ 46' 0'' = 0.485$

[٢] إذا كان ميل مستقيم = 36.73° ، فإن : قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي الزاوية التي ظلها = 36.73° ، و باستخدام الآلة الحاسبة يكون :

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(0.485) = 25^\circ 46' 0''$

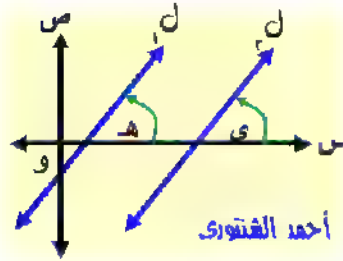
(١) أكمل مستخدماً الآلة الحاسبة الجدول التالي حيث : α الزاوية الموجبة

التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٦]	[٥]	[٤]	[٣]	[٢]	[١]	
١.٢٤٦			١	$\sqrt{3}$		α
	$25^\circ 46' 0''$	30°	35°			$\tan \alpha$

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين :

الشكل المقابل :

يمثل مستقيمين متوازيين l_1 ، l_2 ميلهما α_1 ، α_2 و يصنعان زاويتين

موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات α_1 ، α_2 على الترتيب فيكون : $\alpha_1 = \alpha_2$ لأنهما متناظرتان، و بالتالي يكون : $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ ، $\alpha_1 = \alpha_2$

مما سبق نستنتج أن :

إذا كان : $l_1 \parallel l_2$ فإن : $\alpha_1 = \alpha_2$

أي أن : إذا توازي مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين

و العكس صحيح

فإذا كان : $\alpha_1 = \alpha_2$ فإن : $l_1 \parallel l_2$

أي أن : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين

فمثلاً :

إذا كان : المستقيم l يمر بالنقطتين $(-3, 2)$ ، $(1, 6)$ فإن : $\alpha = \tan^{-1} \frac{6-2}{1-(-3)} = \tan^{-1} 1$ و إذا كان : المستقيم l يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السيناتزاوية قياسها 45° فإن : $\alpha = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$ ، $\therefore \alpha = 45^\circ$ $\therefore l_1 \parallel l_2$

(٢) إذا كان : المستقيم l يمر بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(2, 0)$ ،
و المستقيم m يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها 20° متوازيان أوجد قيمة n

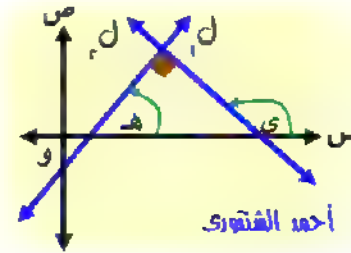
(٤) إذا كان : المستقيم l يمر بالنقطتين $(-1, 1)$ ، $(3, -3)$ ،
يوازي محور السينات أوجد قيمة n

أحمد الشنتوري

(٣) إذا كان : المستقيم l يمر بالنقطتين $(1, 0)$ ، $(2, 1)$ ،
و المستقيم m يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها 60° متوازيان أوجد قيمة n

(٥) إذا كان : $\vec{AP} // \vec{BQ}$ حيث $P(3, 4)$ ، $Q(1, 2)$ ،
، $C(n + 3, 4)$ ، $E(-2, 3)$ أوجد قيمة n

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين :
الشكل المقابل :



يمثل مستقيمين متعامدين l_1 ، l_2
ميلهما m_1 ، m_2 و يصنعان زاويتين
موجبيتين مع الإتجاه الموجب لمحور
السينات h ، y على الترتيب فإن :

$$90^\circ + (h \searrow) = (y \searrow)$$

فإذا كان : $(h \searrow) = 40^\circ$ فإن : $(y \searrow) = 130^\circ$
و باستخدام الآلة الحاسبة يكون :

$$h = 40^\circ \Rightarrow \tan h = \tan 40^\circ = 0.8391$$

و بالتالي يكون : $\tan y = -0.8391$

$$y = 130^\circ \Rightarrow \tan y = \tan 130^\circ = -0.8391$$

ملاحظة :

تحقق من ذلك باختيار قياسات أخرى للزاويتين : h ، y
مما سبق نستنتج أن :

إذا كان : l_1 ، l_2 مستقيمان ميلهما m_1 ، m_2 حيث $m_1 \neq m_2$ ، $m_1 \neq 0$ ، $m_2 \neq 0$

وكان : $l_1 \perp l_2$ فإن : $m_1 \times m_2 = -1$

أي أن : حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين $= -1$
و العكس صحيح

فإذا كان : $m_1 \times m_2 = -1$ فإن : $l_1 \perp l_2$

أي أن : حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين $= -1$
فإن المستقيمين يكونان متعامدين

فمثلاً :

إذا كان : المستقيم l_1 يمر بالنقطتين $(-1, 0)$ ، $(1, 3)$

$$\text{فإن : } m_1 = \frac{3 - 0}{1 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

و إذا كان : المستقيم l_2 يمر بالنقطتين $(-1, 0)$ ، $(2, 3)$

$$\text{فإن : } m_2 = \frac{3 - 0}{2 - (-1)} = 1$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \neq -1 \Rightarrow l_1 \not\perp l_2$$

(٦) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(3, 4)$ ، $(5, 2)$ عمودي على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

زاوية قياسها 30°

أحمد الشنتوي

ملاحظات :

- [١] إذا كان : ميل $\overrightarrow{AB} = \text{ميل } \overrightarrow{BC}$ فإن : النقط A, B, C تقع على استقامة واحدة لأنهما مشتركان في نقطة B
- [٢] إذا كان : ميل $\overrightarrow{AB} = \text{ميل } \overrightarrow{BC}$ فإن : النقط A, B, C هي رؤوس مثلث

- [٣] لإثبات أن : المثلث ABC قائم الزاوية في B نثبت أن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

- [٣] لإثبات أن : الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع نثبت أن : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$
- [٤] لإثبات أن : الشكل $ABCD$ مستطيل نثبت أن : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

- [٥] لإثبات أن : الشكل $ABCD$ معين نثبت أن : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$
- [٦] لإثبات أن : الشكل $ABCD$ مربع نثبت أن : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$

- [٧] لإثبات أن : الشكل $ABCD$ شبه منحرف نثبت أن : ضلعين متقابلين فيه متوازيين و الضلعين الآخرين غير متوازيين

فمثلاً :

النقط : $A(3, 4)$ ، $B(1, 1)$ ، $C(-5, 0)$ تقع على استقامة واحدة لأن : نقطة B مشتركة ، $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ حيث :

$$\text{ميل } \overrightarrow{AB} = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2} ، \text{ميل } \overrightarrow{BC} = \frac{0-1}{-5-1} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

(٧) إذا كان : المستقيم L يمر بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, 4)$ ، و المستقيم M يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 45° أوجد قيمة n إذا كان : $L \perp M$

(٨) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم L مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا المستقيم L عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين $(-2, 0)$ ، $(4, -1)$

(٩) أثبت أن النقط : $M(1,1)$ ، $B(3,2)$ ، $D(1,-1)$ تقع على استقامة واحدة

(١١) إذا كان : $M(1,-1)$ ، $B(3,2)$ ، $D(0,6)$ أثبت باستخدام الميل أن : $\triangle MBD$ قائم الزاوية في B

أحمد الشنتوري

(١٠) إذا كانت النقط : $M(1,0)$ ، $B(1,n)$ ، $D(0,2)$ تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة : n

(١٢) إذا كان المثلث الذي رؤوسه $M(3,0)$ ، $B(4,2)$ ، $D(0,-5)$ قائم الزاوية في B أوجد قيمة : n

(١٣) أثبت أن النقط : $M(-1, 1)$ ، $B(0, 0)$ ، $D(6, 0)$ ،
 $E(2, 4)$ أثبت باستخدام الميل أن : الشكل M ب د ع متوازي أضلاع

(١٥) أثبت أن النقط : $M(3, 4)$ ، $B(0, 7)$ ، $D(-1, 2)$ هي
 رؤوس مثلث ، و إذا كانت نقطة $E(2, 1)$ أثبت باستخدام أن :
 الشكل M ب د ع شبه منحرف

أحمد الشنتوري

(١٤) أثبت أن النقط : $M(-1, 3)$ ، $B(0, 1)$ ، $D(6, 4)$ ،
 $E(0, 6)$ أثبت باستخدام الميل أن : الشكل M ب د ع مستطيل

(١٦) إذا كان : M ب د ع شبه منحرف في M ب // E د ، $M(9, -2)$ ،
 $B(3, 2)$ ، $D(8, -8)$ ، $E(4, -3)$ أوجد قيمة : MS

(١٧) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان ميل خط مستقيم أصغر من الصفر فإن الزاوية الموجبة يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون
[صفرية ، حادة ، قائمة ، منفرجة]

[٢] إذا كان : m_1, m_2 ميلى مستقيمين متعامدين فإن :

$$[m_1 - m_2 = 0, m_1 + m_2 = 0, m_1 \times m_2 = 1, m_1 \times m_2 = 0]$$

[٣] إذا كان : m_1, m_2 ميلى مستقيمين متوازيين فإن :

$$[m_1 - m_2 = 0, m_1 + m_2 = 0, m_1 \times m_2 = 1, m_1 \times m_2 = 0]$$

[٤] إذا كان : m_1, m_2 ميلى مستقيمين متعامدين ، و كان :

$$m_1 = 0, \text{ فإن } m_2 = \dots$$

$$[-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$$

[٥] إذا كان : m_1, m_2 ميلى مستقيمين متوازيين ، و كان :

$$m_1 = 0, \text{ فإن } m_2 = \dots$$

$$[-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$$

[٦] المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$ يكونان

[متوازيان ، متعامدان ، منطبقان ، غير متعامدان]

[٧] المستقيم المار بالنقطتين $(-1, -1), (2, 2)$ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

$$[30^\circ, 60^\circ, 135^\circ]$$

أحمد الشنتوري

[٨] إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ل متعامدان

فإن : ل = [$-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}$ ، ٣]

[٩] إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ل متوازيين

فإن : ل = [$-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}$ ، ٣]

[١٠] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ل، ٠) ، (٠، ٤) عمودياً

على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها 40° مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات فإن : ل = [$1, 4, -1, -4$ ، ١]

[١١] إذا كان المستقيم \overleftrightarrow{AB} يوازي محور السينات حيث : $P(8, 3)$

، $B(2, ٢)$ فإن : ل = [$8, 5, 3, 2$]

[١٢] إذا كان : P ب د ع مربعاً قطراه $\overline{AC}, \overline{BD}$ ، \overline{BE} حيث :

$P(3, 0), D(0, -1)$ فإن : ميل \overline{BE} =

$$[3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$$

[١٣] إذا كان : P ب د ع متوازي أضلاع حيث : $(-1, 2)$

، $B(1, 0)$ فإن : ميل \overline{CE} =

$$[3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$$

الدرس الرابع : معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله
وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

تمهيد :

نعلم أن :

العلاقة : $p = s + b$ حيث : $p \neq 0$ ، $b \neq 0$.
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين s ، b
و تمثل بيانياً بخط مستقيم

فمثلاً :

الشكل المقابل :

يبين الخط المستقيم الممثل للعلاقة :

$$p = s + b$$

لتسهيل الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع

المستقيم مع محوري الإحداثيات

كالتالي :

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور

السينات نضع : $p = 0$

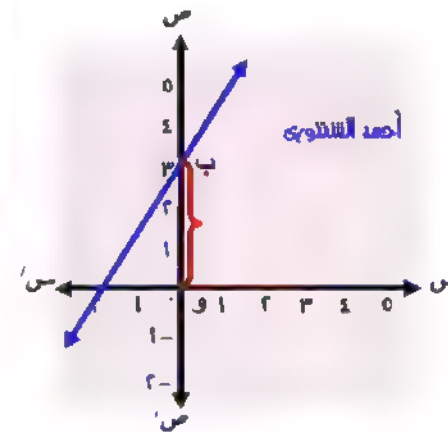
$$0 = s + b \therefore s = -b$$

و منها : $s = -b$ $\therefore (-b, 0)$ يحقق المعادلة

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع : $s = 0$

$$p = 0 + b = b \therefore (0, b)$$

أي أن : المستقيم يمر بالنقطتين : $(-b, 0)$ ، $(0, b)$



من الرسم نجد :

(١) ميل الخط المستقيم موجب ($m > 0$) لأنه يصنع مع الإتجاه

$$\frac{p}{q} = \frac{0 - 2}{-2 - 0} = 1$$

(٢) يسمى البعد المحصور بين النقطتين و ، ب بالجزء المقطوع من

محور الصادات و يرمز له بالرمز (b) وطوله $= 2$ وحدة طول

و يقطع محور الصادات في النقطة ($0, 2$) أي : ($0, 2$)

ملاحظة :

يمكن وضع المعادلة : $p = s + b$ على الصورة :

$p - s = b$ و ذلك بوضع المتغير s في طرف مستقل

فيكون : $p - s = b$ و بقسمة الطرفين على -1 ينتج :

$$s - p = -b$$

و من هذه الصورة نلاحظ :

(١) ميل المستقيم (m) هو معامل s و يساوي 1

(٢) طول الجزء المقطوع من محور الصادات هو الحد المطلق

$$b = 2$$

و هي نفس النتائج التي حصلنا عليها من الرسم السابق

معادلة الخط المستقيم :

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (m) وطول الجزء المقطوع من

محور الصادات (b) هي : $p = m s + b$

حيث : $m > 0$ ، $b > 0$

فمثلاً :

$$(1) \text{ المستقيم الذي معادلته : } ص = -\frac{1}{4}س + 0$$

ميله $= -\frac{1}{4}$ ، و يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات 0 وحدات طولية ، و يمر بالنقطة (0 ، 0)

$$(2) \text{ المستقيم الذي معادلته : } ص = 3س - 3$$

ميله $= 3$ ، و يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات 3 وحدات طولية ، و يمر بالنقطة (0 ، -3)

ملاحظة :

يمكن وضع معادلة الخط المستقيم : $م = ب + ص + د$: $د = 0$ ، $ب \neq 0$ على الصورة : $ص = م - ب + د$ كما يلي :

$$\therefore م = ب + ص + د \Rightarrow م - ب = ص + د \Rightarrow م - ب - د = ص$$

بالقسمة على ب ينتج : $ص = \frac{م - ب - د}{ب}$

حيث : $م = \frac{ب}{ب} - \frac{د}{ب} = \frac{معامل ص}{معامل ب}$

فمثلاً :

$$(1) \text{ المستقيم الذي معادلته : } 0س - 2ص + 4 = 0$$

$$\text{ميله} = -\left(\frac{0}{-2}\right) = \frac{0}{2}$$

و يكون ميل المستقيم الموازي له $= \frac{0}{2}$

، ميل المستقيم العمودي عليه $= -\frac{0}{2}$

$$(2) \text{ المستقيم الذي معادلته : } 2س + 3ص + 1 = 0$$

$$\text{ميله} = -\frac{2}{3}$$

و يكون ميل المستقيم الموازي له $= -\frac{2}{3}$

$$\text{، ميل المستقيم العمودي عليه} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3 ، 4) موازياً للمستقيم}$$

$$2س - 3ص + 1 = 0 \text{ نتبع ما يلي :}$$

ميل المستقيم المعطى $= \frac{2}{3}$ ، \therefore المستقيمان متوازيان

$$\therefore \text{ ميل المستقيم المطلوب} = \frac{2}{3}$$

، نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هي : $ص = م + س + د$

$$\therefore \text{ معادلة المستقيم المطلوب هي : } ص = \frac{2}{3}س + د$$

، \therefore المستقيم يمر بالنقطة (3 ، 4)

$$\therefore 4 = \frac{2}{3} \times 3 + د \text{ ومنها : } د = 2$$

$$\therefore \text{ معادلة المستقيم المطلوب هي : } ص = \frac{2}{3}س + 2$$

$$\text{، بالضرب} \times 3 \text{ ينتج : } 3ص = 2س + 6$$

للأمانة العلمية
يرجى عدم حذف أسمى نهائياً
يسمح فقط بإعادة النشر
دون أي تعديل

(١) أوجد ميل المستقيم و الجزء المقطوع من محور الصادات في الحالات التالية :

[١] $٤س - ٣ص - ١٢ = ٠$

[٢] $٢س + ٤ص - ٨ = ٠$

[٣] $٥س - ٢ص + ١٠ = ٠$

[٤] $٦س + ٣ص + ٦ = ٠$

(٢) أوجد معادلة الخط المستقيم في الحالات التالية :

[١] ميله يساوي ٣ و يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً مقداره ٥ وحدات

[٢] ميله يساوي $-\frac{1}{3}$ و يقطع جزءاً من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات

[٣] ميله يساوي $\frac{2}{5}$ و المار بالنقطة (٣ ، ٥)

أحمد الشنتوي

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على \overline{AB} من نقطة منتصفها

حيث $M(1, 3)$ ، $B(3, 0)$

(٥) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة M و بنقطة منتصف \overline{BC}

حيث $M(0, -6)$ ، $B(3, 7)$ ، $C(1, -3)$

(٣) أوجد معادلة الخط المستقيم في الحالات التالية :

[١] المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(2, -1)$

[٢] المار بالنقطة $(-1, 4)$ و يوازي المستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y = 0$$

[٣] المار بالنقطة $(1, 2)$ و عمودي على المستقيم الذي معادلته

$$x - 2y = 0$$

[٤] المار بالنقطة $(1, 2)$ و يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات زاوية قياسها 40°

أحمد الشنتوري

(٦) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محور الإحداثيات السيني و الصادي جزأين موجبين طوليهما ٤ ، ٩ وحدات طولية على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم و محوري الإحداثيات

(٨) ب د ع معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث : م (١ ، ٦)
، د (٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، ع

أحمد الشنتوي

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ميل الخط المستقيم $\frac{1}{3} = \frac{1 - \text{ص}}{\text{س}}$ و يقطع من محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣)

(٩) الجدول المقابل يمثل علاقة خطية
[١] أوجد معادلة الخط المستقيم
[٢] أوجد طول الجزء المقطوع
من محور الصادات
[٣] أوجد قيمة م

٣	٢	١	س
٢	٣	١	ص = د (س)

[٨] مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحد بالمستقيمات : $s = 0$.

، $s = 0$ ، $s = 3$ - $s = 4$ ، $s = 12$ تساوي

[6 ، 7 ، 12 ، 15]

[٩] معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ١ و يمر بنقطة الأصل هي

[$s = 1$ ، $s = 1$ ، $s = -1$ ، $s = 0$]

[١٠] إذا كان المستقيم : $s = 3$ حـ + يمر بالنقطة

(4 ، 6) فإن : حـ =

[3 - ، 3 ، 4 ، 4 -]

[١١] المستقيم : $s = 3$ - $s = 3$ حـ + $s = 0$ يصنع مع الاتجاه الموجب

لمحور السينات زاوية موجبة قياسها يساوي

[30 ، 40 ، 60 ، 90]

[١٢] معادلة المستقيم الذي ميله $s = 0$ ، و يقطع جزءاً موجباً من

محور الصادات مقداره ٧ وحدات هي

[$s = 0$ حـ + ٧ ، $s = 0$ حـ - ٧]

، $s = 0$ حـ + ٧ ، $s = 0$ حـ - ٧]

[١٣] ميل المستقيم العمودي على المستقيم : $s = 3$ - $s = 2$ حـ + ٦

يساوي

[$\frac{2}{3}$ - ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ - ، $\frac{2}{3}$]

[١٤] ميل المستقيم الموازي للمستقيم : $s = 3$ - $s = 2$ حـ + ٦

يساوي

[$\frac{2}{3}$ - ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ - ، $\frac{2}{3}$]

(١٠) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] ميل المستقيم الذي معادلته : $s = 0$ + $s = 3$ - $s = 2$ حـ + ٦

يساوي

[٢] المستقيم الذي معادلته : $s = 3$ - $s = 2$ حـ + ٦ و يقطع من

محور الصادات جزءاً طوله يساوي

[$\frac{2}{3}$ - ، ٢ ، ٦ ، ٢ -]

[٣] إذا كان المستقيمان : $s = 3$ - $s = 4$ حـ - $s = 3$ ،

لـ حـ + $s = 4$ متعامدان فإن : لـ =

[3 ، 3 - ، 4 ، 4 -]

[٤] إذا كان المستقيمان : $s = 0$ حـ + $s = 2$ حـ + ٥ ،

متوازيان فإن : لـ =

[1 - ، 1 ، 2 ، 2 -]

[٥] إذا كان المستقيم : لـ حـ + $s = 3$ - $s = 2$ حـ + ٦ يمر بالنقطة

(2 - ، 4) فإن : لـ =

[3 - ، 3 ، 2 ، 2 -]

[٦] معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 - ، 2) و يوازي محور

السينات هي

[$s = 2$ حـ + ٢ ، $s = 2$ حـ - ٢ ، $s = 2$ حـ - ٢ ، $s = 2$ حـ + ٢]

[٧] معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 - ، 2) و يوازي محور

الصادات هي

[$s = 2$ حـ + ٢ ، $s = 2$ حـ - ٢ ، $s = 2$ حـ - ٢ ، $s = 2$ حـ + ٢]

اجوبة بعض التمارين

الوحدة الأولى

العلاقات و الدوال

الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتي

$$(1) \quad 1) \quad 8 = 4 + 4 \quad \text{و منها : } 4 = 2$$

$$3 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 0$$

$$2) \quad 0 = 1 + 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$3 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$3) \quad 3 = \sqrt{9} = 3$$

$$4 = 2 + 2 = \sqrt{4} = 2 \quad \text{و منها : } 2 = 0$$

$$(2) \quad 1 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$1 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$(1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 0)$$

$$6 = (2 \times 3) = 6$$

$$(3) \quad 1 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$(2, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 0)$$

$$(1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 0)$$

$$6 = (2 \times 3) = 6$$

$$(4) \quad 1 = 1 - 1 \quad \text{و منها : } 1 = 2$$

$$(1, 2), (1, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 0)$$

$$(2, 2), (2, 1), (2, 0), (3, 1), (3, 0), (4, 1), (4, 0)$$

$$9 = (3 \times 3) = 9$$

$$(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1)$$

$$(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2), (8, 2), (9, 2)$$

$$(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (7, 3), (8, 3), (9, 3)$$

$$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9)$$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)$$

مثل المخطط السهمي بنفسك

$$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9)$$

$$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)$$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9)$$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)$$

$$2 = (1 \times 2) = 2$$

$$3 = (1 \times 3) = 3$$

$$(7) \quad \{0\} = 0$$

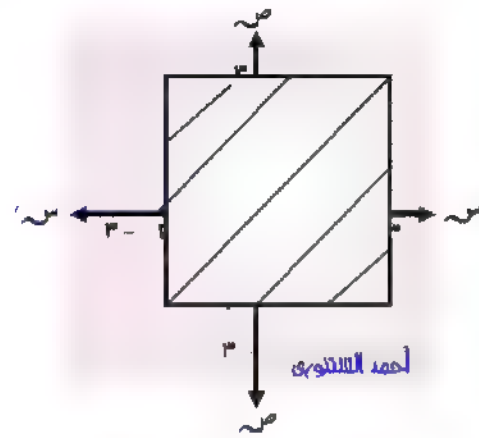
$$\{0\} \times \{2, 3\} = (0 \times 2) \cup (0 \times 3) = \{0\}$$

$$\{3\} = 3$$

$$\{0, 7\} \times \{3\} = (0 \times 3) \cup (7 \times 3) = \{0, 7\}$$

$$\{2\} = 2$$

$$\{2\} \times \{3\} = (2 \times 3) = \{6\}$$



$$[٣, ٢ -] = \text{ص} \quad (١٢)$$

المنطقة المظللة تمثل

$$\begin{aligned} \text{ص} \times \text{ص} \\ \text{ص} \times \text{ص} \ni \text{پ} \\ \text{ص} \times \text{ص} \ni \text{ب} \\ \text{ص} \times \text{ص} \ni \text{د} \\ \text{ص} \times \text{ص} \ni \text{ع} \end{aligned}$$

أحمد الشنتوري

$$\{٢, ٣\} = \text{د} \cap \text{ب}, \{٢, ٢\} = \text{ب} \cap \text{پ} \quad (١٣)$$

$$= \{٢, ٣\} \times \{٢, ٢\} = (\text{د} \cap \text{ب}) \times (\text{ب} \cap \text{پ}) \therefore$$

$$\{(٢, ٢), (٣, ٢), (٢, ٢), (٣, ٢)\}$$

$$\{٢, ٣, ٢, ١\} = \text{د} \cup \text{ب}, \{١\} = \text{ب} - \text{پ} \quad (١٤)$$

$$= \{٢, ٣, ٢, ١\} \times \{١\} = (\text{د} \cup \text{ب}) \times (\text{ب} - \text{پ}) \therefore$$

$$\{(٢, ١), (٣, ١), (٢, ١), (١, ١)\}$$

$$(١٤) \quad \text{ع} \times (\text{ص} - \text{ص}) = (\text{ع} \times \text{ص}) - (\text{ع} \times \text{ص})$$

$$\{٢\} = \text{ص} - \text{ص}$$

$$\therefore \text{ع} \times (\text{ص} - \text{ص}) = \{٢\} \times \{٦, ٥\}$$

$$(١) \quad \{(٢, ٦), (٢, ٥)\} =$$

$$= \{٣, ٢, ١\} \times \{٦, ٥\} = \text{ص} \times \text{ع}$$

$$, (٢, ٦), (١, ٦), (٣, ٥), (٢, ٥), (١, ٥)\}$$

$$\{(٣, ٦)\}$$

أحمد الشنتوري

$$\{(٢, ٣)\} =$$

$$(٨) \quad \text{ص} = \{٥, ٢\}, \text{ص} = \{٥, ٢, ٣\}$$

$$\text{ص} \times \text{ص} = \{(٥, ٢), (٢, ٢), (٣, ٢)\}$$

$$\{(٥, ٥), (٢, ٥), (٣, ٥),$$

$$\text{ص} \times \text{ص} = \{(٢, ٢), (٥, ٣), (٢, ٣)\}$$

$$\{(٥, ٥), (٢, ٥), (٥, ٢),$$

$$\therefore \{(٥, ٥)\} = (\text{ص} \times \text{ص}) \cap (\text{ص} \times \text{ص})$$

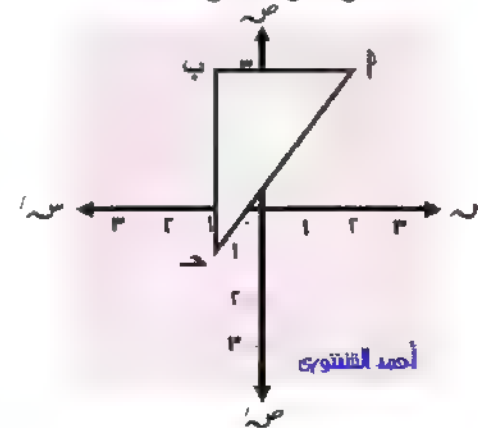
$$(٩) \quad \text{ص} = \{٥, ٣, ٢\}, \text{ص} = \{٩, ٦\}$$

$$\text{ص} \times \text{ص} = \{(٥, ٦), (٣, ٦), (٢, ٦)\}$$

$$\{(٥, ٩), (٣, ٩), (٢, ٩),$$

(١٠) أرسم الشبكة و عين النقط بنفسك

٩. (١١) (١٢)
 م تقع في الربع الرابع ، ب تقع على محور السينات ،
 د تقع في الربع الثالث ، ع تقع في الربع الثاني ،
 هـ تقع على محور الصادات ، س تقع في الربع الأول



(١٢) مثلث قائم الزاوية

$$[٣] \quad ١٢ = ٥ + ٢ + ٣$$

وحدة طول

$$[٤] \quad ٦ = ٢ \times ٣ \times \frac{١}{٢}$$

وحدة مساحة

أحمد الشنتوري

ع_١ ليست دالة لأن : العنصر $2 \in S$ لم يخرج منه سهم إلى أي عنصر من عناصر S

$$E_1 = \{ (1, 1), (2, 0), (3, 2) \}$$

ع_١ لأن : كل عنصر من عناصر S خرج سهم واحد فقط إلى عنصر من عناصر S

$$E_2 = \{ (1, 1), (2, 0), (3, 2), (3, 3) \}$$

ع_٢ ليست دالة لأن : العنصر $3 \in S$ خرج منه سهمان إلى أي كل من $2, 4 \in S$

$$(3) E_3 = \{ (0, 3), (2, 3), (4, 3) \}$$

ع_٣ دالة لأن : تظهر نقطة واحدة فقط على الخط الرأسى لكل عنصر من عناصر S في المخطط البياني الممثل للعلاقة
المدى $\{ 3 \}$

$$E_4 = \{ (0, 0), (2, 2), (3, 2), (4, 1) \}$$

ع_٤ ليست دالة لأن : توجد نقطتين على أحد الخطوط الرأسية للعنصر $2 \in S$ هما $(2, 2), (3, 2)$

$$E_5 = \{ (2, 1), (4, 0) \}$$

ع_٥ ليست دالة لأن : لا توجد أي نقطة على الخط الرأسى للعنصر $0 \in S$ في المخطط البياني الممثل للعلاقة

$$(4) \text{ بيان د } = \{ (3, 3), (2, 0), (0, 2) \}$$

$$\{ (1, 0) \}$$

[٣] ع_٣ علاقة من L إلى S

[٤] ع_٤ علاقة من S إلى S

$$(10) \begin{matrix} [1] & [2] & [3] & [4] \\ 12 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{5} \end{matrix}$$

$$(11) \begin{matrix} [1] & [2] & [3] & [4] \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{matrix}$$

$$(12) \{ [1] \} \ni [2] \ni [3] \ni [4] \ni [5] \ni [6] \ni [7] \ni [8]$$

$$(14) E = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 9) \}$$

$$(13) E = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$$

$$(10) E = \{ (1, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7) \}$$

$$\{ (4, 7) \}$$

$$(16) E = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 3) \}$$

الدرس الثالث : الدالة (التطبيق)

(1) [1] ع_١ ليست دالة لأن : العنصر $0 \in S$ لم يظهر كمسقط أول

في أي من الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

[2] ع_٢ ليست دالة لأن : العنصر $3 \in S$ ظهر كمسقط أول أكثر من

مرة مرتين حيث ظهر في الزوجين المرتبين $(3, 4), (3, 0)$

[3] ع_٣ دالة لأن كل عنصر من عناصر S ظهر كمسقط مرة

واحدة فقط في بيان العلاقة

$$(2) E_1 = \{ (1, 4), (3, 6) \}$$

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

(١٠) بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ،

(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) ،

(١ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٥) }

{ (١ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) }

ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة

في بيان ع ، مثل بنفسك

(١١) بيان ع = { (٢ ، ٢) ، (١٦ ، ٢) ، (١٠ ، ٢) ،

(٢٤ ، ٢) ، (٣٠ ، ٥) ، (١٠ ، ٥) ، (٣٠ ، ٢) ،

{ (٢٤ ، ٨) ، (١٦ ، ٨) }

ع ليست دالة لأن العنصر ٢ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة

في بيان ع ، مثل بنفسك

(١٢) [٢] ٨ { (٧ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٣) } [٢] ٨

[٣] { ٦ ، ٣ } [٤] ٣ [٥] صفر [٦] ٧ - [٧] المدى

[٨] ٨ [٩] ٩ [١٠] { ١١ ، ٧ ، ٣ } [١١] ١١

الدرس الرابع : دوال كثيرات الحدود

(١) كثيرة حدود [٢] ليست كثيرة حدود [٣] ليست كثيرة حدود

[٤] ليست كثيرة حدود [٥] كثيرة حدود

(٢) [١] الرابعة [٢] الأولى [٣] د (س) = ٢ ، الصفرية

[٤] د (س) = س - ٥ ، الثالثة

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، مثل بنفسك

(٥) [١] { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

[٢] { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } [٣] ارسم بنفسك

(٦) بيان ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط مرة

واحدة فقط في بيان ع ، مثل بنفسك

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

(٧) بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

{ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) }

ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة

في بيان ع ، مثل بنفسك

(٨) بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

{ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) }

{ (١ ، ٦) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٦) }

{ (١٠ ، ١٠) }

ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة

في بيان ع ، مثل بنفسك

(٩) إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، مثل بنفسك

بيان ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) }

{ (٢ ، ٥) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط مرة

واحدة فقط في بيان ع ، مثل بنفسك

أحمد الشنتوي

أحمد الشنتوي

النقطة $(-\frac{1}{4}, 0)$ ، و يقطع محور

الصادات في النقطة $(0, 1)$

س	٠	$\frac{3}{4}$	٢
ص	٣	٠	١ -

[٤] المستقيم يقطع محور السينات في

النقطة $(\frac{3}{4}, 0)$ ، و يقطع محور

الصادات في النقطة $(0, 3)$

(٥) مثل بنفسك ، المستقيمان يمران بنقطة الأصل ،

[١] المستقيم يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة

[٢] المستقيم يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة

(٦) مثل بنفسك ،

[١] المستقيم يوازي محور السينات و يمر بالنقطة $(2, 0)$

[٢] المستقيم يوازي محور السينات و يمر بالنقطة $(0, 3 -)$

س	٤ -	٣ -	٢ -	١ -	٠	١	٢
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

مثل بنفسك ، إحداثي نقطة رأس المنحنى هي : $(0, 1 -)$

معادلة محور التماثل هي : $س = 1 -$ القيمة الصغرى للدالة .

س	١ -	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	٣ -	٣	٥	٣	٣ -

مثل بنفسك ، إحداثي نقطة رأس المنحنى هي : $(0, 1)$

معادلة محور التماثل هي : $س = 1$ القيمة العظمى للدالة = ٥

[٥] د (س) = $س^2 + س - 2$ ، الثانية

[٦] د (س) = $س^2 - 2س$ ، الثالثة

[٧] د (س) = $س^2 - 6س + 2س$ ، الرابعة

(٣) إذا كان : د (س) = $س^2 - 3س + 2$ أوجد :

$$[1] د (2) = (2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 2 + 2 - 6 = 2$$

$$[2] د (1) = (1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$[3] د (3-) = (3-) = (3-)^2 - 3(3-) + 2 = 2 + 9 + 9 = 2 + (3-) \times 3 - (3-)$$

$$[4] د (\sqrt{3}) = (\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3(\sqrt{3}) + 2 = 2 + \sqrt{3} \times 3 - \sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{3} \times 3 - 3 = 2 + \sqrt{3} \times 3 - 3 = 2$$

$$[5] د (\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - 3(\frac{1}{4}) + 2 = 2 + \frac{1}{4} \times 3 - \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 2 + \frac{2}{4} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

(٤) مثل بنفسك ،

[١] المستقيم يقطع محور السينات في

النقطة $(0, 1)$ ، و يقطع محور

الصادات في النقطة $(1, 0)$

[٢] المستقيم يقطع محور السينات في

النقطة $(2, 0)$ ، و يقطع محور

الصادات في النقطة $(0, 2)$

[٣] المستقيم يقطع محور السينات في

س	٠	١	٢
ص	١ -	٠	١

س	٠	٢	١
ص	٢	٠	١

س	٠	$\frac{1}{4} -$	٢
ص	١	٠	٥

(١٢) [١] (٠ ، ٠)	[٢] ٥	[٣] ١٠	[٤] صفر	[٥] ٣	[٦] ٣
[٧] ١	[٨] صفر	[٩] الثالثة	[١٠] الرابعة	[١١] الثانية	
[١٢] ٢	[١٣] ٢	[١٤] ١			

الوحدة الثانية

النسبة و التناسب

و التغير الطردى و التغير العكسي

الدرس الأول : النسبة

(١) نفرض أن : العدد = س $\therefore \frac{2}{3} = \frac{س + ٧}{س + ١٢}$

$\therefore ٢١ + ٣ = س + ٢٤ = س + ٢ + ٢٢$ ومنها : س = ٣

(٢) نفرض أن : العدد = س $\therefore \frac{2}{3} = \frac{س - ٥}{س - ٦}$

$\therefore ١٨ - ٣ = س - ١٠ = س - ٢ - ٨$ ومنها : س = ٨

(٣) نفرض أن : العدد = س \therefore ثلاثة أمثاله = ٣ س

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{٣ - ٤٩}{٣ - ٦٩} = \frac{٣ - ٤٩}{٣ - ٦٩}$ $\therefore ١٤٧ - ٩ = س - ١٣٨ = ٦ - س$

$\therefore ٩ = س - ٣$ ومنها : س = ١٢

(٤) نفرض أن : العدد = س \therefore مربعه = س^٢

$\therefore \frac{٧}{٦} = \frac{س + ١٧}{س + ١١}$ $\therefore ١٠٢ + ٦ = س + ٧٧ = ٧ + س$

$\therefore ٢٥ = س$ ومنها : س = ٢٥

(٥) النسبة بين العددين ٣ : ٤

\therefore نفرض أن العدد الأول = ٣ م ، العدد الثاني = ٤ م

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

مثل بنفسك ، إحداثي نقطة رأس المنحنى هي : (٠ ، ٣)

معادلة محور التماثل هي : س = ٣ القيمة الصغرى للدالة =

(١٠) إذا كان : د (س) = س^٢ + ب س - ٣ ، و كان : ب = ٢

\therefore (١ - ، ٤) ينتمي إلى بيان الدالة

$\therefore ٤ - ب + س = ١ -$ $\therefore ١ - = ب + س$

$\therefore ٢ = ب$ $\therefore ١ - = ب + س$

$\therefore ١ - = ب - س$ $\therefore ١ = ب$ ، $\therefore ٢ - = ب$

\therefore د (س) = س^٢ - ٢ س - ٣ ، و يكون :

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = د (س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

مثل بنفسك

(١١) \therefore و = ٤ وحدات \therefore إحداثي م (٤ ، ٠)

\therefore د (٠) = ٤ \therefore ٤ = م - ٠ \therefore م = ٤

\therefore د (س) = ٤ - س^٢ بوضع : د (س) = ٠

\therefore ٤ - س^٢ = ٠ \therefore س = ± ٢

\therefore ب (٠ ، ٢) ، د (٠ ، -٢)

\therefore مساحة Δ م ب د = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ = ٨$ وحدة مساحة

$$\frac{4}{9} = \frac{2+2^3}{3-2^2} \therefore$$

$$\therefore 36 + 2^2 \cdot 7 = 24 - 2^3 \cdot 2$$

$$\therefore 36 + 28 = 24 - 8$$

$$\therefore \text{العدد الأول} = 36 = 12 \times 3, \text{ العدد الثاني} = 12 \times 2 = 24$$

$$(1) \therefore \text{النسبة بين العددين} = 3 : 2$$

$$\therefore \text{نفرض أن العدد الأصغر} = 2, \text{ العدد الأكبر} = 3$$

$$\therefore 2^2 \times 2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

$$\therefore (2 + 1)(9 - 2) = 1$$

$$\text{ومنها : } 2 = 9, \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \text{العدد الأصغر} = 9, \text{ العدد الأكبر} = 18 = 9 \times 2$$

$$(V) \therefore \text{النسبة بين بعدي المستطيل} = 3 : 2$$

$$\therefore \text{نفرض أن : الطول} = 3 \text{ سم , العرض} = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore 2(3 + 2) = 10 \text{ سم} \therefore 10 = 2 \text{ سم} \text{ ومنها : } 2 = 10$$

$$\therefore \text{الطول} = 18 = 6 \times 3, \text{ العرض} = 6 \times 2 = 12 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المستطيل} = 18 \times 12 = 216 \text{ سم}^2$$

$$(A) \therefore \text{النسبة بين طول قاعدة و ارتفاع مثلث} = 3 : 2$$

$$\therefore \text{نفرض أن : طول القاعدة} = 3 \text{ سم}$$

$$\text{, الارتفاع} = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \text{ سم}$$

$$\therefore 3 \text{ سم} = 48 \text{ سم} \text{ ومنها : } 4 = 48$$

$$\therefore \text{طول القاعدة} = 3 \times 4 = 12 \text{ سم}$$

$$\text{, الارتفاع} = 2 \times 4 = 8 \text{ سم}$$

$$(9) \text{ نفرض أن : عدد البنين} = 8, \text{ عدد البنات} = 5$$

$$\therefore \text{عدد التلاميذ الكلي} = 8 + 5$$

$$\text{, عدد الناجحين من البنين} = 8 \times \frac{79}{100} = 6.32 \text{ سم}$$

$$\text{, عدد الناجحين من البنات} = 5 \times \frac{89}{100} = 4.45 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{عدد الناجحين الكلي} = 6.32 + 4.45 = 10.77$$

$$\therefore \text{نسبة النجاح} = \frac{6.32 + 4.45}{8 + 5} = 0.83$$

$$\therefore 6.32 + 4.45 = 10.77 \text{ سم}$$

$$\therefore 6.32 - 4.45 = 1.87 \text{ سم}$$

$$\therefore 0.4 = 0.6 \text{ سم} \therefore 0.4 : 0.6 = 2 : 3$$

$$\therefore 2 : 3 = 8 : 12$$

$$(10) \therefore \text{النسبة بين طولي الجزئين} = 8 : 12$$

$$\therefore \text{نفرض أن : محيط الدائرة} = 12 \text{ سم}$$

$$\text{, محيط المربع} = 8 \text{ سم} \therefore 8 + 12 = 20$$

$$\therefore 19 \text{ سم} = 102 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 8 \times 12 = 96 \text{ سم}$$

$$\therefore 2 \times \frac{22}{7} \times 8 = 96 \text{ سم} \text{ ومنها : } 14 = 96$$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{22}{7} \times (14)^2 = 616 \text{ سم}^2$$

، محيط المربع = $8 \times 8 = 64$ سم

∴ طول ضلع المربع = $4 \times 64 = 16$ سم

ومنها : طول ضلع المربع = 16 سم

∴ مساحة المربع = $(16)^2 = 256$ سم²

∴ مساحة الدائرة : مساحة المربع = $\frac{256}{4} = 64$ سم²

الدرس الثاني : التناسب

(١) نفرض أن : $p = 2$ ، $b = 5$ حيث m ثابت \neq .

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{24}{216} = \frac{210 - 214}{210 + 216} = \frac{p - 27}{p + 23}$$

(٢) نفرض أن : الرابع المتناسب هو : s

∴ الكميات : 4 ، 12 ، 16 ، s متناسبة

$$\therefore \frac{16}{s} = \frac{4}{12} \quad \therefore 16 \times 12 = 4s$$

ومنها : $s = 48$

(٣) نفرض أن : العدد = s

∴ 3 + s ، 5 + s ، 8 + s ، 12 + s متناسبة

$$\therefore \frac{3 + s}{5 + s} = \frac{8 + s}{12 + s}$$

$$\therefore 40 + 13s + s^2 = 10 + 3s + s^2$$

$$\therefore 2s = 30 \quad \therefore s = 15$$

$$(4) \quad 2 \times (2s + 3) = 1 \times (5 - s)$$

$$\therefore 4s + 6 = 5 - s \quad \therefore 5s = -1 \quad \therefore s = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore s : 5 = -\frac{1}{5} : 5$$

، بفرض أن : $s = 7$ ، $m = 5$ حيث m ثابت \neq .

$$\therefore \frac{5}{7} = \frac{210}{216} = \frac{210 - 214}{210 + 216} = \frac{s - 27}{s + 23}$$

$$(5) \quad \therefore \frac{s}{2} = \frac{5}{0} \quad \therefore s = 10 \quad \therefore 20 = 5 \quad \therefore m = 10 \quad \therefore m \text{ ثابت } \neq$$

$$\therefore 0 = \frac{22}{2} = \frac{210 - 212}{210 + 216} = \frac{s - 27}{s + 23}$$

$$(6) \quad 20s - 20 = 4s + 4 \quad \therefore 16s = 24 \quad \therefore s = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (5 - s) = 2 \quad \therefore 5 - \frac{3}{2} = 2 \quad \therefore 5 - s = 2$$

$$\therefore 5 : 2 = s : 2 \quad \therefore s = 5$$

(٧) بفرض أن : $\frac{p}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{0} = m$ ، m ثابت \neq .

$$\therefore p = 3m \quad b = 2m \quad c = 0$$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{28 - 25}{25 + 28 - 29} = \frac{23}{24} = \frac{1}{7} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٨) ∴ p ، b ، c ، a كميات متناسبة

∴ نفرض أن : $\frac{p}{b} = \frac{c}{a} = m$ ، m ثابت \neq .

$$\therefore p = bm \quad c = am$$

$$(1) \quad \text{الطرف الأيمن} = \frac{(3b - 64)2}{(60 + b)2} = \frac{64 - 3b}{60 + b} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيمن} = \frac{(50 - 62)2}{62 - b} = m \quad (1)$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٢) بضرب حدى النسبة الأولى $\times ٢$ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الأولى و الثانية ينتج :

$$(١) \frac{٢س + ٢ص}{٢ + ٢} = \text{إحدى النسب}$$

، بضرب حدى النسبة الأولى $\times ٢$ ، حدى النسبة الثانية $\times ٢$ و جمع مقدمات و توالى النسب الثلاث ينتج :

$$(٢) \frac{٢س + ٢ص + ٢}{٢ + ٢ + ٢} = \text{إحدى النسب} ، \text{أكمل بنفسك}$$

(١٣) بضرب حدى النسبة الثانية $\times ٢$ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الأولى و الثانية و الاختصار ينتج :

$$(١) \frac{٢س + ٢}{٢} = \text{إحدى النسب}$$

، بضرب حدى النسبة الثانية $\times ٤$ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الثانية و الثالثة و الاختصار ينتج :

$$(٢) \frac{٤س + ٤}{٤} = \text{إحدى النسب} ، \text{أكمل بنفسك}$$

(١٤) بجمع مقدمات و توالى النسب الثلاث و الاختصار ينتج :

$$(١) \frac{٢س + ٢ص + ٢}{٢} = \text{إحدى النسب}$$

و بطرح النسبة الثانية من حدى النسبة الأولى ينتج :

$$(٢) \frac{٢س - ٢}{٢} = \text{إحدى النسب} ، \text{أكمل بنفسك}$$

(١٥) بجمع مقدمات و توالى النسب الثلاث ينتج :

$$\text{كل نسبة} = \frac{٢(س + ص)}{س + ص} = ٢ \quad (\text{بشرط } س + ص \neq ٠)$$

$$(١) \frac{س}{س} = ١ \quad \text{و منها : } ٢ = س$$

$$(٢) \text{الطرف الأيسر} = \frac{٢(٤ + ٢)}{٤ + ٢} = ٢$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(٩) نفرض أن : $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ ، $٢ = ٢$ ، $٢ = ٢$ ثابت $\neq ٠$

$$\therefore ٢ = ٢ ، ٢ = ٢ ، ٢ = ٢$$

$$(١) \text{الطرف الأيمن} = \frac{٢(٢ + ٢)}{٢ + ٢} = ٢$$

$$(٢) \text{الطرف الأيسر} = \frac{٢(٢ + ٢)}{٢ + ٢} = ٢$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٠) ∴ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

∴ نفرض أن : $\frac{س}{س} = \frac{ص}{ص} = \frac{ع}{ع} = ١$ ، $س = س$ ، $ص = ص$ ، $ع = ع$ ثابت $\neq ٠$

$$\therefore س = س ، ص = ص ، ع = ع$$

$$(١) \text{الطرف الأيمن} = \frac{٢(س + ص)}{٢(س + ص)} = ١$$

$$(٢) \text{الطرف الأيسر} = \frac{٢(س + ص)}{٢(س + ص)} = ١$$

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١١) نفرض أن : $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ ، $٢ = ٢$ ، $٢ = ٢$ ، $٢ = ٢$ ثابت $\neq ٠$

$$\therefore ٢ = ٢ ، ٢ = ٢ ، ٢ = ٢$$

$$(١) \text{الطرف الأيمن} = \frac{٢(٢ + ٢ + ٢)}{٢ + ٢ + ٢} = ٢$$

$$(٢) \text{الطرف الأيسر} = \frac{٢(٢ + ٢ + ٢)}{٢ + ٢ + ٢} = ٢$$

$$(1) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{(1+r^3)r^3d}{(1+r^3)d} = \frac{r^3d + r^3d}{r^3d + r^3d}$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^3d}{r^3d} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$(2) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{r^3d + r^3d + r^3d}{r^3d + r^3d + r^3d} = 1$$

$$(1) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{(1+r+r^2)r^3d}{(1+r+r^2)d} = 1$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^3d}{r^3d} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$(19) \text{ نفرض أن : } \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e}$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e} \Rightarrow p = \frac{bd}{c}, \quad b = \frac{pc}{d}, \quad c = \frac{pe}{a}$$

$$(1) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{(2-r^2)r^2e}{(2-r^2)e} = \frac{r^2e + r^2e}{r^2e + r^2e}$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^2e}{r^2e} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$(1) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{(1-r^2)r^2e}{(1-r^2)e} = \frac{r^2e - r^2e}{r^2e - r^2e}$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^2e}{r^2e} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$r = \frac{b+c}{e} \quad \text{و منها : } b+c = re$$

$$\text{و بالتعويض من (1) ينتج : } b+c = re \quad \therefore \frac{re}{2} = e$$

$$\therefore b+c = re = 2e \Rightarrow b+c = 2e$$

$$(17) \quad d = (p-b) = (p-c) = (p-e)$$

$$\therefore d = p-b = p-c = p-e \Rightarrow p = b+d = c+d = e+d$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{b}{d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{d} \Rightarrow p=b=c=e$$

$$(18) \text{ نفرض أن : } \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e}$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e} \Rightarrow p = \frac{bd}{c}, \quad b = \frac{pc}{d}, \quad c = \frac{pe}{a}$$

$$(1) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{(2+r)r^2d}{(2+r)d} = \frac{r^2d + r^2d}{r^2d + r^2d}$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^2d}{r^2d} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$(1) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{(1+r)r^2d}{(1+r)d} = \frac{r^2d + r^2d}{r^2d + r^2d}$$

$$(2) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{r^2d}{r^2d} = 1$$

من (1) ، (2) : الطرفان متساويان

$$(18) \text{ نفرض أن : } \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e}$$

$$\therefore \frac{p}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a}{e} \Rightarrow p = \frac{bd}{c}, \quad b = \frac{pc}{d}, \quad c = \frac{pe}{a}$$

$$(٢٣) \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & [٧] & \frac{5}{9} & [٦] & \frac{4}{9} & [٥] & 2 \pm [4] & 3 & [3] & 16 & [2] \\ 18 & [13] & 16 & - & [12] & \frac{7}{10} & [11] & 8 & [10] & 11 & [9] & 0 & [8] \\ 3 & [18] & 7 & [17] & 28 & [16] & 3 & [15] & 40 & [14] \end{array}$$

الدرس الثالث : التغير الطردى و التغير العكسى

(١) \therefore ص \propto س \therefore ص = k س حيث : k ثابت $\neq 0$.

$$\therefore \text{ص} = 12 \text{ عندما س} = 7$$

$$\therefore 12 = k \times 7 \therefore k = \frac{12}{7}$$

\therefore العلاقة بين ص ، س هي : ص = $\frac{12}{7}$ س

$$\therefore \text{عندما ص} = 20 \therefore 20 = \frac{12}{7} \times \text{س} \therefore \text{س} = \frac{20 \times 7}{12} = 10$$

(٢) \therefore ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ حيث : k ثابت $\neq 0$.

$$\therefore \text{ص} = 12 \text{ عندما س} = 22$$

$$\therefore 12 = k \times \frac{1}{22} \therefore k = 12 \times 22 = 264$$

$$\therefore \text{عندما س} = 6 \therefore 6 = \frac{264}{\text{ص}} \therefore \text{ص} = \frac{264}{6} = 44$$

(٣) \therefore $p \propto q$ $\therefore p = kq$ حيث : k ثابت $\neq 0$.

$$\therefore p = 4 \text{ عندما } q = 12$$

$$\therefore 4 = k \times 12 \therefore k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{عندما } p = 36 \therefore 36 = \frac{1}{3} \times q \therefore q = 36 \times 3 = 108$$

$$(٤) \therefore f \propto \frac{1}{v} \therefore f = \frac{k}{v}$$

$$(٢٠) \text{ نفرض أن : } \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$$

$$\therefore \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

$$(١) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

$$(٢) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

من (١) ، (٢) \therefore الطرفان متساويان

$$(٢) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

$$(١) \frac{1+p}{p} = \frac{(1-p)(1+p)}{(1-p)p}$$

$$(٢) \frac{1+p}{p} = \frac{(1+p)p}{p} = \frac{p+p^2}{p}$$

من (١) ، (٢) \therefore الطرفان متساويان

$$(٢١) \therefore 3, 12, 36 \therefore 36 = 12 \times 3 \therefore 12 \pm 36$$

$$\therefore 144 = 12 \times 12 \therefore 144 \pm 12$$

$$(٢٢) \text{ نفرض أن : } \frac{p}{a} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e} = k$$

$$(١) \therefore \text{ص} + \text{ع} = 12 \therefore \text{ع} = 12 - \text{ص}$$

$$(٢) \therefore \text{ع} + \text{ص} = 18 \therefore \text{ع} = 18 - \text{ص}$$

$$\text{بقسمة (٢) } \div \text{(١) ينتج : } \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{ص} : \text{ع} = 3 : 2 \therefore \text{ع} = \frac{2}{3} \text{ ص}$$

$$10 = \text{ف}_1, 7 = \text{م}_1, 1 = \text{ن}_1,$$

∴ بالتعويض ينتج : $\text{ف}_1 = 20$ كم

$$(5) \quad \text{∴ و } \infty \text{ م} \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{م}_1} = \frac{1}{\text{ف}_1}$$

$$\text{∴ و } 182 = \text{م}_1, 35 = \text{م}_1, 312 = \text{م}_1,$$

∴ بالتعويض ينتج : $\text{م}_1 = 7$ كجم

$$(7) \quad \text{∴} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \quad \text{∴} \quad 7 + 6 = 6 + 1 \quad \text{∴} \quad 3 + 3 = 4$$

ومنها : $4 = 6$ ∴ 4∞ م

$$(V) \quad \text{∴} \quad 4 + 6 = \text{ص} \quad \text{∴} \quad 6 \infty \text{ م} \quad \text{∴} \quad 6 = \text{م} \text{ م}$$

$$\text{∴} \quad \text{ص} = \text{م} \text{ م} + 4 \quad \text{∴} \quad \text{ص} = 19 \quad \text{عندما} \quad 0 =$$

$$\text{∴} \quad 19 = \text{م} \times 4 + 0 \quad \text{ومنها} : \text{م} = 3$$

$$\text{∴} \quad \text{ص} = 3 + 4$$

$$\text{عندما} \quad 2 = \text{ص} \quad \text{∴} \quad 8 = 2 + 2 \times 3 = \text{ص}$$

$$(8) \quad \text{∴} \quad \text{ص} = 6 + 6 \quad \text{∴} \quad 6 \infty \text{ م} \quad \text{∴} \quad 6 = \text{م} \text{ م}$$

$$\text{∴} \quad \text{ص} = 6 + \text{م} \text{ م} \quad \text{∴} \quad \text{ص} = 2 \quad \text{عندما} \quad 0 =$$

$$\text{∴} \quad 2 = 6 + \text{م} \times 6 \quad \text{ومنها} : 2 = 6$$

$$\text{∴} \quad \text{ص} = 8 \quad \text{عندما} \quad 3 =$$

$$\text{∴} \quad 8 = 2 + 3 \times 2 \quad \text{ومنها} : 2 = 2$$

$$\text{∴} \quad \text{ص} = 2 + 2$$

$$\text{عندما} \quad 0 = \text{ص} \quad \text{∴} \quad 12 = 0 \times 2 + 2 = \text{ص}$$

$$(9) \quad \text{∴} \quad 20 = \text{س}^1 - 20 = \text{س}^1 + 4 = \text{ص}^1$$

$$\text{∴} \quad (0 = \text{س}^1 - 2 = \text{ص}^1) \quad \text{∴} \quad \text{س}^1 = \frac{2}{5} \text{ ص}^1 \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 \infty \text{ م}$$

$$(10) \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 \infty \text{ م}^1 \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 = \text{م}^1 \quad \text{حيث} : \text{م}^1 \text{ ثابت} \neq 0$$

$$\text{∴} \quad \text{ص}^1 = 10 \quad \text{عندما} \quad 3 =$$

$$\text{∴} \quad 10 = \frac{1}{4} \quad \text{ومنها} : \text{م}^1 = 30 \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 = \frac{30}{4}$$

$$\text{عندما} \quad 0 = \text{ص}^1 \quad \text{فإن} : \text{ص}^1 = \frac{3}{5} = 6$$

$$(11) \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 \infty \text{ م}^1 \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 = \text{م}^1 \quad \text{حيث} : \text{م}^1 \text{ ثابت} \neq 0$$

$$\text{∴} \quad \text{ص}^1 = 9 \quad \text{عندما} \quad 4 =$$

$$\text{∴} \quad 9 = \frac{1}{2} \quad \text{ومنها} : \text{م}^1 = 36 \quad \text{∴} \quad \text{ص}^1 = \frac{36}{2}$$

$$\text{عندما} \quad 12 = \text{ص}^1 \quad \text{فإن} : \text{ص}^1 = \frac{24}{3} = 3$$

$$(12) \quad \text{∴} \quad \text{س}^1 = \text{ص}^1 - 14 = \text{ص}^1 + 49$$

$$\text{∴} \quad (\text{س}^1 - \text{ص}^1) = 7 \quad \text{∴} \quad \text{س}^1 = \text{ص}^1 + 7$$

∴ ص تتغير عكسياً مع س

$$(13) \quad \text{∴} \quad \text{ع}^1 \infty \text{ ن}^1 \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{ن}^1} = \frac{1}{\text{ع}^1} \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{ن}^1} = \frac{1}{\text{ع}^1}$$

$$\text{∴} \quad \text{ع}^1 = 0, \quad \text{ن}^1 = 3, \quad \text{ن}^1 = 2, 0 =$$

∴ بالتعويض ينتج : $\text{ع}^1 = 7, 2 = \text{سم} / \text{ث}$

$$(14) \quad \text{∴} \quad \text{ن}^1 \infty \text{ م}^1 \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{م}^1} = \frac{1}{\text{ن}^1} \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{م}^1} = \frac{1}{\text{ن}^1} \quad \text{∴} \quad \frac{1}{\text{م}^1} = \frac{1}{\text{ن}^1}$$

$$\text{∴} \quad \text{ن}^1 = 3$$

أحمد الشنتوري

$$(10) [1] \because \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{1}{1.5} \text{ نوع التغير ص ، س عكسي}$$

$$[2] \because \text{ص} \propto \frac{1}{\text{س}} \therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{س}} \therefore \text{ص} = 6$$

$$\text{عندما س} = 2 \therefore \text{م (ثابت التناسب)} = 12$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{12}{\text{س}}$$

$$[3] \text{ ص} = \frac{12}{3} = 4 \text{ ساعات}$$

$$[4] \frac{12}{\text{س}} = 12 \text{ ومنها : س} = 1$$

$$(16) [1] \because \frac{72}{48} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \therefore \text{نوع التغير ص ، س طردي}$$

$$[2] \because \text{ص} \propto \text{س} \therefore \text{ص} = \text{س} \therefore \text{ص} = 12$$

$$\text{عندما س} = 1 \therefore \text{م (ثابت التناسب)} = 12$$

$$\therefore \text{ص} = 12 \text{ س}$$

$$[3] \text{ ص} = 2 \times 12 = 24$$

$$[4] 36 = 12 \text{ س ومنها : س} = 3$$

$$(17) \because \text{ع} \propto \frac{1}{\text{ص}} \therefore \text{ع} = \frac{1}{\text{ص}} \therefore \text{ع} = 2 \text{ عندما ص} = 3$$

$$\therefore \text{بالتعويض ينتج : م} = 6 \therefore \text{ع} = \frac{1}{\text{ص}}$$

$$\therefore \text{س} = \text{ع} + 8 \therefore \text{س} = \frac{1}{\text{ع}} + 8$$

$$\text{عندما ص} = 3 \therefore \text{س} = 10$$

$$(18) \because \text{م} \propto \frac{1}{\text{س}} \therefore \text{م} = \frac{1}{\text{س}} \therefore \text{م} = 18 \text{ عندما س} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore \text{بالتعويض ينتج : م} = 8 \therefore \frac{8}{\text{س}} = \text{م}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{م} + 7 \therefore \text{ص} = \frac{8}{\text{س}} + 7$$

$$\text{عندما س} = 2 \therefore \text{ص} = 9$$

$$(19) \because \text{ص} = 2 - \text{م} \therefore \text{م} = 2 - \text{ص} \therefore \frac{1}{\text{س}} = \text{م} \therefore \frac{1}{\text{س}} = 2 - \text{ص}$$

$$\therefore \text{ص} = 2 - \frac{1}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{ص} = 14 \text{ عندما س} = 1 \therefore \text{بالتعويض ينتج : م} = 16$$

$$\therefore \text{ص} = 2 - \frac{16}{\text{س}} \therefore \text{بالضرب} \times \text{س} \text{ ينتج :}$$

$$\text{س} = 16 - 16 \text{ عندما س} = 2 \therefore \text{ص} = 2$$

$$(20) \because \text{ص} = 9 - \text{م} \therefore \text{ص} = 9 - \frac{1}{\text{س}} \therefore \text{ص} = \frac{9}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{9}{\text{س}} = 9 - \text{م} \therefore \text{م} = 9 - \frac{9}{\text{س}} \therefore \text{عندما س} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\therefore \text{بالتعويض ينتج : م} = 8 \therefore \text{ص} = \frac{9}{\text{س}}$$

$$\text{عندما س} = 1 \therefore \text{ص} = 9$$

$$(21) [1] \frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{ص}}{5} \therefore \text{س} = \frac{3}{5} \text{ ص} = 7 [3] 2$$

$$[4] \text{ ص} = \text{م} + \text{س} \text{ حيث : م ثابت } \neq 0 [5] (4)$$

$$[6] \frac{1}{\text{س}} [7] \text{ س} [8] 3 [9] 4 [10] \frac{1}{\text{س}} [11] \frac{1}{\text{س}}$$

الوحدة الثانية الإحصاء

الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات

$$(1) \because \text{عدد التلاميذ بالمدرسة} = 33 \text{ عامل}$$

$$\therefore \text{عدد العينة العشوائية} = \frac{1}{11} \times 33 = 3 \text{ عاملاً}$$

يتم استخدام الآلة الحاسبة في إنتاج أرقام عشوائية في النطاق من

(٨) حجم العينة كلها = $\frac{3000}{200} \times 40 = 600$ مفردة

(٩)

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤	الإجمالي
عدد مفردات الطبقة	٥٠٠	٧٠٠	٣٥٠	٤٥٠	٢٠٠٠
عدد المفردات التي تمثل الطبقة في العينة	١٠	١٤	٧	٩	٤٠

الدرس الثاني : التشتت

س	س - س	س - س
١٢	٤ -	(س - س)
١٣	٣ -	٩
١٦	٠	٠
١٨	٢	٤
٢١	٣	٩
٨٠	المجموع	٥٤

(١) الوسط الحسابي = \bar{S}

$$16 = \frac{80}{5} =$$

الانحراف المعياري = σ

$$3,3 = \sqrt{\frac{54}{5}} =$$

أحمد الشنتوي

(٢) كون الجدول بنفسك ، $\bar{S} = 16$ ، مج (س - س) = 534

$$9,3 = \sigma$$

(٣) كون الجدول بنفسك ، $\bar{S} = 31$ ، مج (س - س) = 22

$$2,3 = \sigma$$

(٤) كون الجدول بنفسك ، $\bar{S} = 3$ ، مج (س - س) = 11

٠,٠٠١ إلى ٣٣٠. ليصبح النطاق من ١ إلى ٣٣٠.

(٢) عدد العاملين بالمصنع = ٢٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $200 \times \frac{1}{100} = 20$ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة في إنتاج أرقام عشوائية في النطاق من

٠,٠٠١ إلى ٢٠٠. ليصبح النطاق من ١ إلى ٢٠٠

(٣) ∴ عدد النزلاء بالفندق = ٣٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $300 \times \frac{1}{100} = 3$ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة في إنتاج أرقام عشوائية في النطاق من

٠,٢٠١ إلى ٠,٥٠٠. ليصبح النطاق من ٢٠١ إلى ٥٠٠

(٤) العدد الكلي للطلاب بالمدرسة = ٨٤٠ عامل

عدد مفردات الطبقة الأولى = $840 \times \frac{30}{840} = 30$ طالباًعدد مفردات الطبقة الثانية = $840 \times \frac{40}{840} = 40$ طالبة

(٥) العدد الكلي للعاملين بالمصنع = ٢٥٠ عامل

عدد مفردات الطبقة الأولى = $250 \times \frac{120}{250} = 120$ عاملاًعدد مفردات الطبقة الثانية = $250 \times \frac{70}{250} = 70$ فنياًعدد مفردات الطبقة الثالثة = $250 \times \frac{60}{250} = 60$ مهندساً(٦) عدد مفردات الطبقة الثانية = $1000 - 500 = 500$ مفردةعدد المفردات الكلية للعينة = $120 \times \frac{500}{1000} = 60$ مفردة(٧) حجم العينة كلها = $240 \times \frac{4000}{10000} = 96$ مفردة

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{S} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{26}{3}} = 1,48$$

(٨) نعتبر عدد الوحدات الثالفة : S ، و عدد الصناديق : N

كون الجداول بنفسك ، $N = 100$ ، $M = 300$

، $\bar{S} = 3$ وحدات ، $M = (S - \bar{S}) \times N = 204$ ، $\sigma = 1,4$

(٩) نعتبر العمر بالسنوات : S ، و عدد الأطفال : N

كون الجداول بنفسك ، $N = 10$ ، $M = 90$

، $\bar{S} = 9$ وحدات ، $M = (S - \bar{S}) \times N = 30$ ، $\sigma = 1,7$

المجموعات	N	S	$S \times N$	$S - \bar{S}$	$(S - \bar{S})^2$	$(S - \bar{S})^2 \times N$
0	3	2	6	-1	1	27,48
-4	4	6	24	-1	1	120,44
-8	7	10	70	-1	1	17,92
-12	2	14	28	-1	1	11,02
-16	9	18	162	-1	1	368,74
مجم	25		290			800

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{S} = \frac{290}{25} = 11,6$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{800}{25}} = 0,7$$

$$\sigma = 10,3$$

(٥) كون الجداول بنفسك ،

بالنسبة للمجموعة (٥) : $\bar{S} = 78$ ، $M = (S - \bar{S})^2 = 100$

$$\sigma = 2,63$$

، بالنسبة للمجموعة (ب) : $\bar{S} = 78$ ، $M = (S - \bar{S})^2 = 2948$

، $\sigma = 20,70$. المجموعة M أكثر تجانساً من المجموعة ب

(٦) كون الجداول بنفسك ،

بالنسبة لدرجة الحرارة العظمى : $\bar{S} = 20$ ،

مجم $(S - \bar{S})^2 = 18$ ، $\sigma = 1,5$

، بالنسبة لدرجة الحرارة الصغرى : $\bar{S} = 31$ ،

مجم $(S - \bar{S})^2 = 11$ ، $\sigma = 3,2$

(٧) نعتبر عدد الأهداف : S ، و عدد المباريات : N

S	N	$S \times N$	$S - \bar{S}$	$(S - \bar{S})^2$	$(S - \bar{S})^2 \times N$
0	1	0	-3	9	9
1	4	4	-2	4	16
2	6	12	-1	1	6
3	9	27	0	0	0
4	5	20	1	1	5
5	3	15	2	4	12
6	2	12	3	9	18
مجم	30	90			66

$$[2] \text{ طا } p = \frac{4}{9} = \frac{1}{3} , \text{ طا } d = \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

$$[3] \text{ حا } p \text{ حتا } d + \text{حا } p \text{ حتا } p = \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} =$$

$$1 = \frac{49}{64} + \frac{1}{64}$$

$$[4] \text{ حتا } p + \text{حا } p = \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{7}{8} \right) = p \text{ حا } p + p \text{ حا } p = 1$$

$$(5) \Delta \text{ س ص ع فيه : ق. (ص) } = 90^\circ ,$$

$$\text{س ع} = 20^\circ \text{ سم} , \text{س ص} = 24^\circ \text{ سم}$$

$$[1] \text{ (ع ص)} = 571 - 720 = 29^\circ \therefore \text{ع ص} = 7^\circ \text{ سم}$$

$$[2] \text{ حا ع} = \frac{24}{90} , \text{ حتا س} = \frac{24}{90}$$

$$[3] \text{ حتا ع حتا س} - \text{حا ع حا س} = \frac{24}{90} \times \frac{24}{90} - \frac{24}{90} \times \frac{7}{90} =$$

$$[4] 1 - \text{طا } p \text{ ع} = 1 - \left(\frac{24}{90} \right) = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$$

$$(6) \Delta \text{ م ب د فيه : م ب} = p \text{ ح} , \text{م ب} \perp \text{م د}$$

$$\therefore \text{ب د} = \text{م د} = \text{م ب} = \frac{1}{2} \times 12^\circ \text{ سم} = 6^\circ \text{ سم}$$

$$\therefore \Delta \text{ م ب د فيه القائم الزاوية في م}$$

$$\therefore (\text{م ب}) = 100 - 36 = 64^\circ \therefore \text{م ب} = 8^\circ \text{ سم}$$

$$[1] \text{ حاب} + \text{حا د} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < 1$$

$$[2] \text{ حتا } d + \text{حا } p = \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{7}{8} \right) = \text{حا } d + \text{حا } p =$$

$$1 = \frac{1}{4} =$$

س	س - س	س - س
36	0	20
40	1	1
42	1	1
38	3	9
46	0	20
44	3	9
246	المجموع	70

(11) نعتبر الدرجات : س

الوسط الحسابي = س

$$41 =$$

الانحراف المعياري = σ

$$3,42 = \sqrt{\frac{70}{9}} =$$

(12) [1] التطبيقية [2] المدى [3] [4] [5] [6] الانحراف المعياري

$$[7] 39 [8] \sigma = 0 [9] \text{ المدى}$$

[10] جميع المفردات تكون متساوية في القيمة

[11] أسلوب العينات [12] المتحيزة [13] 30

[14] { 27 , 0 , 19 , 39 , 20 } لأن مدنها الأكبر

الوحدة الرابعة حساب المثلثات

الدرس الأول : النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

$$(1) [1] 41,3^\circ [2] 80,6306^\circ$$

$$(2) [1] 36^\circ [2] 46^\circ 14' 57''$$

$$(3) \Delta \text{ م ب د فيه : ق. (ب) } = 90^\circ ,$$

$$\text{م ب} = 7^\circ \text{ سم} , \text{ب د} = 8^\circ \text{ سم}$$

$$[1] (\text{م ب}) = 100 - 36 = 64^\circ \therefore \text{م ب} = 10^\circ \text{ سم}$$

مساحة Δ $P \times \frac{1}{2} = 9 \times 12 \times \frac{1}{2} = 54$ ،

$$= 04 \text{ سم}^2$$

(٩) $\therefore \Delta \text{ ب ح قائم الزاوية في ب}$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma, \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma \therefore$$
$$= \frac{1}{2} \frac{r}{h} + \frac{1}{2} \frac{r}{h} \therefore$$

$$= \frac{r(\frac{\partial p}{\partial p})}{r(\frac{\partial p}{\partial p})} + \frac{r(\frac{\partial b}{\partial p})}{r(\frac{\partial p}{\partial p})} = r(\frac{\frac{\partial p}{\partial p}}{\frac{\partial p}{\partial p}}) + r(\frac{\frac{\partial b}{\partial p}}{\frac{\partial p}{\partial p}})$$

$$I = \frac{r(\neg p)}{r(\neg p)} = \frac{r(\neg p) + r(\neg p)}{r(\neg p)}$$

$$\frac{\sqrt{u}}{r} = \frac{a}{r} \quad \therefore \sqrt{u} = a \quad \therefore (1)$$

، بفرض أن : $p = \sqrt[3]{3}$ وحدات طول

، $\mu = 2$ وحدات طول

∴ ب ح = ۱ وحدات طول (فیثاغورث)

∴ حاح = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ححاح = $\frac{1}{2}$ ، طاح = $\sqrt{\frac{3}{4}}$

(ii) $\therefore \frac{10}{19} = 1$ با فرض أن : ب ح = 10 وحدات طول

، $m = IV$ وحدات طول

∴ $\mu = \lambda$ وحدات طول (فیٹاغورث)

$$\frac{1}{14} \times \frac{10}{14} \times 7 = 1 \text{ ح } 1 \text{ ح } 7 \therefore$$

$$\frac{76}{789} =$$

(٦) Δ مء د فيه القائم الزاوية في ء

$$\text{سم } 12 = 6 \text{ ب} \therefore 122 = 11 - 110 = {}^1(6 \text{ ب}) \therefore$$

١٠٠٠ : Δ ب فيه القائم الزاوية في ع

$$\therefore 70 = 122 - 179 = {}^r(\text{پے}) \therefore 0 = \text{پے} \text{ سم}$$
$$\frac{7}{6} - = \frac{\frac{12}{5} + \frac{12}{4}}{\frac{12}{5} - \frac{12}{4}} = \therefore \text{المقدار}$$

(V) نرسم $\overline{b} \perp \overline{a}$ ، $\overline{c} \perp \overline{a}$ ،

، مء // بـ ح . مء وء مستطيل

و ع = هـ | ا .

، و ه = ء = ع = ا سم ، ، ب = پ = ف = ح = ث = ذ سم

∴ $\Delta \vdash \Delta \equiv \Delta \rightarrow \Delta$ ، ينتج أن : $\vdash \Delta = \Delta$ و

$$\therefore \text{ب ه} + \text{ح و} = \text{ب ح} - \text{ه و} = 12 - 1 = 11 \text{ سم}$$

∴ پ = ح = و = ز = سم

∴ $\Delta P_b H : P = H = 3 \text{ سم}$ (فیثاغورث) ∴ $e = 3 \text{ سم}$

$$F = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{r} \times \frac{\frac{\pi}{2}}{r} \times 0}{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)} = \therefore \text{المقدار}$$
$$(A) \quad \frac{9}{b-d} = \frac{p}{b-d} = p : p-d$$

من Δ ٤٤ ح : ط ح = $\frac{٤٤}{٤٤} = \frac{٢}{٤}$ ،

∴ $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ و منها : بـ ح = ۱۲ سم

$$\therefore \text{پ} = \text{د} = \text{پ} - \text{د} = \text{ه} - \text{د} = ۱۲ - ۴ = ۸ \text{ سم}$$

أحمد التنتوي

أحمد التتوي

(٢) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \text{الطرفان متساويان}$$

$$\frac{1}{2} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 1 - \frac{2}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \therefore \text{الطرفان متساويان}$$

$$\frac{1}{2} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \therefore \text{الطرفان متساويان}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0 \therefore \text{الطرفان متساويان}$$

$$1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} \quad [5]$$

$$1 = \text{الطرف الأيسر}$$

\therefore الطرفان متساويان

(٣) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{حاس} \quad [1] \therefore 60^\circ = \text{س}$$

$$1 = \text{طا س} \quad [2] \therefore 50^\circ = \text{س}$$

$$\frac{1}{2} = \text{حاس} \quad [3] \therefore 30^\circ = \text{س}$$

$$(12) \therefore 4 \text{ طا } 1 = 3 \therefore 1 = 3 \text{ طا } \frac{2}{4} = 1.5$$

، بفرض أن : $3 = \text{ح}$ وحدات طول

، $4 = \text{ب}$ وحدات طول

$\therefore 1 = \text{ح}$ وحدات طول (فيثاغورث)

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \text{ح}^2 - \text{ح}^2 = 1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$(1) \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{، الطرف الأيسر} = 1 - \text{ح}^2 = 1 - 1 = 0$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \times 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

من (1) ، (2) ينتج أن : الطرفان متساويان

الدرس الثاني : النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

$$(1) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$$

$$[2] \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$[3] \quad 1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$[4] \quad 0 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[5] \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore \angle (\Delta PAB) = 12' 52' 36''$$

ب د = ٢٠ سم (فيثاغورث)

مساحة المستطيل PAB د = ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ سم

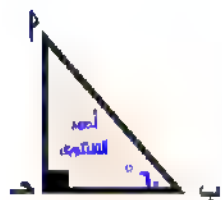
$$(٨) \text{ من } \Delta PAB \text{ القائم الزاوية في ب يكون : } \angle PAB = 20' = \frac{\text{ب د}}{24}$$

$$\therefore \text{ب د} = 24 \times 20' = 21,8 \text{ سم}$$

(٩) من ΔPAB يكون :

$$\text{ح ا} = 6' = \frac{\text{ب د}}{6}$$

$$\therefore \text{ب د} = 6 \times 6' = 0,2 \text{ سم}$$



(١٠) مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

$$\therefore \text{ب د} = \frac{96}{8} = 12 \text{ سم} , \quad \text{ب د} : \text{ه د} = 3 : 1$$

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{4} \text{ ب د} = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \text{ سم}$$

من ΔPAB القائم الزاوية في ه يكون : ط ا ب = $\frac{4}{5}$

$$\therefore \angle (\Delta PAB) = 38' 26' 19''$$

$$\text{ح ا ب} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \therefore \text{ب د} = 7 \times \frac{\text{أ}}{38' 26' 19''} = 8,5 \text{ سم}$$

$$(11) \text{ ب د} // \text{ب ح} , \text{م د} \perp \text{ب د} , \text{ع و} \perp \text{ب د}$$

$\therefore \text{م د} = \text{ه د}$ مستطيل

$$\text{و ه} = \text{م د} = 0 \text{ سم} , \quad \text{ب د} = \text{ع د} = 0 \text{ سم}$$

$\therefore \Delta PAB \equiv \Delta EAD$ ، ينتج أن : ب ه = د و

$$(4) \text{ ح ا} = 1 \therefore \text{ح ا} = \frac{1}{4} \therefore \text{س} = 30'$$

$$(5) \frac{1}{4} - \text{ط ا} = \text{س} = \frac{1}{4} \therefore \text{ط ا} = 1 \therefore \text{س} = 40'$$

(٤) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

$$(1) \text{ س} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{16} \text{ ومنها : س} = \frac{1}{16}$$

$$(2) \text{ س} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \text{ ومنها : س} = 4$$

$$(3) \text{ س} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ ومنها : س} = 3$$

$$(4) \text{ س} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ ومنها : س} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$(5) (1) 40' 33'' \quad (2) 30' 112'' \quad (3) 30' \quad (4) 60' \quad (5) 30'$$

$$(6) 20' \quad (7) 50' \quad (8) 6' \quad (9) \frac{1}{4} \quad (10) \text{ح ا} = 6' \quad (11) \frac{1}{4}$$

$$(12) \sqrt[3]{2} \quad (13) 2 \text{ ح ا} \quad (14) \frac{16}{9} \quad (15) \frac{21}{20} \quad (16) \frac{14}{16}$$

$$(17) \text{ صفر} \quad (18) \frac{1}{17} \quad (19) <$$

(٦) $\therefore \Delta PAB$ فيه : ب د = م د ، $\text{ب د} \perp \text{ع د}$

$$\therefore \text{ب د} = \text{ع د} = \frac{1}{4} \text{ ب د} = 6 \text{ سم}$$

من ΔPAB يكون : ح ا ب = $\frac{3}{4} = 0,75$

$$\therefore \angle (\Delta PAB) = 30' 24' 21'' , \quad \text{ح ا ب} = \frac{\text{ع د}}{\text{أ}} = \frac{6}{8}$$

$$\therefore \text{ع د} = 8 \times \frac{6}{8} = 6 \text{ ح ا} = 30' 24' 21'' = 0,3 \text{ سم}$$

(٧) من ΔPAB القائم الزاوية في ب يكون : ح ا (ΔPAB) = $\frac{15}{16}$

$$٢٥ = \angle(ب د) ، \quad ٥ = \sqrt{٩+١٦} = ب د \quad \text{وحدة طول}$$

$$٥٠ = \angle(د ب) ، \quad ٥٠ = \sqrt{١+٤٩} = د ب \quad \text{وحدة طول}$$

$$\angle(د ب) = \angle(ب د) + \angle(ب د) ،$$

$\therefore \Delta ب د د$ قائم الزاوية في ب

$$\text{مساحة } \Delta ب د د = ٥ \times ٥ \times \frac{1}{2} = ١٢,٥ \quad \text{وحدة مساحة}$$

$$(٤) ب د = \sqrt{٢٥+٢٥} = ٢٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{٣٦+١} = ٣٧ \quad \text{وحدة طول}$$

$$د ب = \sqrt{١+٣٦} = ٣٧ \quad \text{وحدة طول}$$

$\therefore ب د = د ب = د ب \quad \therefore \Delta ب د د$ متساوي الساقين

$$(٥) ب د = \sqrt{١٦+٤} = ٢٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{١٦+٦٤} = ٨٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$د ب = \sqrt{١٦+٤} = ٢٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{١٦+٦٤} = ٨٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{٦٤+٣٦} = ١٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{١+١} = ١ \quad \text{وحدة طول}$$

$$\therefore ب د = د ب = د ب ، \quad ب د = د ب ، \quad ب د = د ب$$

\therefore الشكل الرباعي ب د د د مستطيل

$$\text{مساحة المستطيل ب د د د} = ب د \times د ب$$

$$= ٨٠ \times ٢٠ = ١٦٠٠$$

$$= ٨٠ \quad \text{وحدة مساحة}$$

$$\therefore ب د + د ب = د ب - د ب = ٥ - ١١ = ٦ \text{ سم}$$

$$\therefore ب د = د ب = ٣ \text{ سم} ، \quad \Delta ب د د \text{ يكون : حقا ب} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \angle(ب د) = ٥٣^\circ \quad \angle(ب د) = ٤٩^\circ$$

$$\angle(ب د) = ١٨٠^\circ - ٥٣^\circ - ٤٩^\circ = ٧٨^\circ$$

من $\Delta ب د د$ يكون : $ب د = ٣ \text{ سم}$ (فيثاغورث)

$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف ب د د د} = \frac{1}{2} \times (١١ + ٥) \times ٤$$

$$= ٣٢ \text{ سم}^2$$

الوحدة الخامسة

الهندسة التحليلية

الدرس الأول : البعد بين نقطتين

$$(١) ب د = \sqrt{٤+٩} = ١٣ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{١٦+٣٦} = ٤٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$ب د = \sqrt{٣٦+٨١} = ٩٠ \quad \text{وحدة طول}$$

$$\therefore ب د + ب د = ب د - ب د \quad \therefore \text{على استقامة واحدة}$$

$$(٢) ب د = \sqrt{٤+١} = ٥ \quad \text{وحدة طول} ، \quad ٥ = \angle(ب د)$$

$$ب د = \sqrt{٩+٢٥} = ٣٤ \quad \text{وحدة طول} ، \quad ٣٤ = \angle(ب د)$$

$$ب د = \sqrt{١+١٦} = ١٧ \quad \text{وحدة طول} ، \quad ١٧ = \angle(ب د)$$

$$\therefore \angle(ب د) > \angle(ب د) + \angle(ب د) \quad \therefore \Delta ب د د \text{ منفرج الزاوية}$$

$$(٣) ب د = \sqrt{١٦+٩} = ٥ \quad \text{وحدة طول} ، \quad ٢٥ = \angle(ب د)$$

أحمد الشنتوي

$$(٦) \quad \text{أ} = \sqrt{17+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{د} = \sqrt{17+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ع} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{د} ، \text{ب} = \text{ع} ،$$

\therefore الشكل الرباعي أ ب د ع متوازي أضلاع

$$(٧) \quad \text{أ} = \sqrt{17+25} = \sqrt{42} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{25+17} = \sqrt{42} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{د} = \sqrt{17+25} = \sqrt{42} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ع} = \sqrt{25+17} = \sqrt{42} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{أ} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{د} ، \text{ب} = \text{ع} ،$$

\therefore الشكل الرباعي أ ب د ع مربع

$$\therefore \text{مساحة المستطيل أ ب د ع} = \text{أ} \times \text{ب} = (\sqrt{42})^2 = 42$$

$$= 42 \text{ وحدة مساحة}$$

$$(٨) \quad \text{أ} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{د} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ع} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{أ} = \sqrt{17+17} = \sqrt{34} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{37+37} = \sqrt{74} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{د} = \text{ب} = \text{ع} ،$$

\therefore الشكل الرباعي أ ب د ع معين

$$\therefore \text{مساحة المستطيل أ ب د ع} = \text{أ} \times \text{ب} = \sqrt{34} \times \sqrt{74}$$

$$= \sqrt{34 \times 74} = \sqrt{2516}$$

$$= 50.16 \text{ وحدة مساحة}$$

$$(٩) \quad \text{أ} = \sqrt{9+17} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{ب} = \sqrt{17+9} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\text{د} = \sqrt{17+9} = \sqrt{26} \text{ وحدة طول ،}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{د} = \text{ب} = \text{ع} ،$$

\therefore الشكل الرباعي أ ب د ع معين

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 5 = 31.4 \text{ وحدة طول}$$

$$(١٠) \quad \therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع} \therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع} = 5$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع} = 5$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع} = 5$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ب} = \text{د} = \text{ع} = 5$$

$$(١١) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

الدرس الثاني : إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

$$(1) \quad (1) \quad (2, 4) = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+2}{2} \right)$$

$$(2) \quad (3, -3) = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{1-3}{2} \right)$$

$$(3) \quad (1) \quad \left(\frac{3+3}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\therefore \frac{3+3}{2} = 3 \quad \therefore 3 = 3 \quad \therefore 8 = 1 + 3 \quad \therefore 4 = \frac{1+3}{2}$$

$$9 = 3 \quad \therefore 12 = 3 + 3 \quad \therefore 1 = \frac{3+3}{2}$$

$$(2) \quad \left(\frac{3+3}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = (3, 3)$$

و منها : $3 = 3$ ، $3 = 3$

$$(3) \quad \text{كما سبق : } 3 = 3 \quad \therefore 10 = 3 + 3 \quad \therefore 3 = 3$$

(٣) بفرض أن \overline{AB} منتصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{4+4}{2} \right) = (2, 4)$$

بفرض أن \overline{AB} منتصف \overline{AB} يكون : $(3, -3)$ ، \overline{AB} منتصف \overline{AB} يكون : $(0, 3)$ (٤) بفرض أن \overline{AB} نقطة تقاطع القطرين \overline{AB} ، \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (0, 2)$$

بفرض أن \overline{AB} : $(3, 3)$

$$\therefore \left(\frac{2-3}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$$

و منها : $3 = 3$ ، $3 = 3$: إحداثي \overline{AB} : $(3, 3)$ (٥) بفرض أن \overline{AB} نقطة تقاطع القطرين \overline{AB} ، \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (0, -1)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \text{ وحدة طول}$$

: مساحة المربع $\overline{ABCD} = \overline{AB} \times \overline{AB} = 5 \times 18 = 90$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{3^2 + 3^2} = 90$$

$$(6) \quad \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ وحدة طول} \quad \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \text{ وحدة طول} \quad \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ وحدة طول} \quad \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

: $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$: قائمة الزاوية في $\triangle ABC$ بفرض أن \overline{AB} : $(3, 3)$ ، \overline{AB} منتصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{4-4}{2} \right) = (2, 0)$$

، و ليكون الشكل \overline{ABCD} مستطيلاًيجب أن تكون \overline{AB} : $(3, 3)$ ، \overline{AB} منتصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = \left(\frac{2-3}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$$

و منها : $3 = 3$ ، $3 = 3$: إحداثي \overline{AB} : $(3, 3)$

$$(7) \quad \overline{AB} = \sqrt{9^2 + 16^2} = \sqrt{337} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 16^2} = \sqrt{257} \text{ وحدة طول}$$

$$(٤) \quad \frac{3+0}{2} = م ، \quad \therefore ل // محور السينات \therefore م = ٠$$

$$\therefore ل + ٣ = ٣ \quad \text{ومنها : } ٣ - = ٠$$

$$(٥) \quad م = ميل \overrightarrow{أب} = ١ ، \quad م = ميل \overrightarrow{أخ} = \frac{١}{٠+٠} = ١$$

$$\therefore \overrightarrow{أب} // \overrightarrow{أخ} \quad \therefore م // م$$

$$\therefore ١ = ٠ + ٠ \quad \text{ومنها : } ١ - = ٠$$

$$(٦) \quad \therefore م = ٣ - \sqrt{3} ، \quad \frac{١}{3\sqrt{3}} = م$$

$$\therefore م \times م = ١ - \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان}$$

$$(٧) \quad \therefore م = ١ - ل ، \quad م = ١ ، \quad \therefore ل \perp ل$$

$$\therefore م \times م = ١ - \quad \therefore ١ = ١ \times (١ - ل)$$

$$\therefore ١ - ل = ١ \quad \text{ومنها : } ٢ = ٠$$

$$(٨) \quad \text{ميل المستقيم المعطى} = ١ -$$

$$\text{بفرض أن قياس الزاوية المطلوبة} = هـ ، \quad \therefore \text{المستقيمان متعامدان}$$

$$\therefore م = ١ ، \quad ط هـ = ١ \quad \therefore (١ - هـ) = ٤٥^\circ$$

$$(٩) \quad \therefore ميل \overrightarrow{أب} = ٢ ، \quad \text{ميل } \overrightarrow{أخ} = ٢$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{أب} = \text{ميل } \overrightarrow{أخ} ، \quad \text{ب نقطة مشتركة بينهما}$$

$$\therefore \text{النقط } م ، ب ، د \text{ تقع على استقامة واحدة}$$

$$(١٠) \quad \therefore \text{النقط } م ، ب ، د \text{ تقع على استقامة واحدة}$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{أب} = \text{ميل } \overrightarrow{أخ}$$

$$\therefore ٢ = ١ - ل \quad \text{ومنها : } ٣ = ٠$$

$$٣ = \sqrt{٩+١٦} = ٥ \quad \text{وحدة طول}$$

$$\text{بفرض أن : } ع (س ، ص) \text{ منتصف } \overrightarrow{أب} \therefore ع \perp \overrightarrow{أب}$$

$$ع = (١-١) = \left(\frac{١+١}{٢} ، \frac{٥-٣}{٢} \right)$$

$$\therefore ٣ = \sqrt{٩+٠} = ٣ \quad \text{وحدة طول}$$

$$\therefore \text{مساحة } \triangle م ب د = \frac{١}{٢} ب د \times ع$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٣ = ١٢ \quad \text{وحدة مربعة}$$

$$(٨) \quad \begin{matrix} [١] (٢-، ٤) & [٢] (٩، ١) & [٣] ٨- & [٤] (١-، ٠) \\ [٥] (٦، ٠) & [٦] (٢، ٣) & [٧] (٠، ٧) \end{matrix}$$

الدرس الثالث : ميل الخط المستقيم

[١]	[٢]	[٣]	[٤]	[٥]	[٦]
٢	$\frac{١}{3\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١	١-	١، ٢٤٦
٧ (١-هـ)	٣٠°	٦٠°	٤٥°	١٣٥°	٤١° ٣' ٥٦°

$$(٢) \quad \therefore م = \frac{١-٢}{٠-٢} = ١ ، \quad م = ١ ، \quad ل // ل \quad \therefore م // م$$

$$\therefore ٢ - ل = ١ \quad \text{ومنها : } ٣ = ٠$$

$$(٣) \quad \therefore م = ١ ، \quad ١ = م ، \quad \sqrt{3} = م ، \quad ل // ل \quad \therefore م // م$$

$$\therefore \sqrt{3} = ٠$$

$$(11) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = \frac{4}{3}, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = 1 = -1 \quad \therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC},$$

$\therefore \Delta ABC$ قائم الزاوية في ب

$$(12) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -3, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{2}{9},$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -3 \times \frac{2}{9} = -\frac{2}{3} \neq -1 \quad \therefore \overrightarrow{AB} \not\perp \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ قائم الزاوية في ب} \quad \therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -3 \times \frac{2}{9} = -\frac{2}{3} \neq -1$$

$$\text{ومنها : ك} = -1$$

$$(13) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = 4, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{1}{4}$$

$$(1) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = 4, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \neq -1$$

$$(2) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = 4, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{1}{4}$$

من (1) ، (2) ينتج أن : الشكل ABC متوازي أضلاع

$$(14) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -\frac{1}{3}, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = -\frac{1}{3}$$

$$(1) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -\frac{1}{3}, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -\frac{1}{3} \times -\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq -1$$

$$(2) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -\frac{1}{3}, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -\frac{1}{3} \times -\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq -1$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad (3)$$

من (1) ، (2) ، (3) ينتج أن : الشكل ABC مستطيل

$$(10) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -1, \quad \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \neq -1$$

\therefore النقطة M ، ب ، د ليست على استقامة واحدة

\therefore النقطة M ، ب ، د هي رؤوس مثلث

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{AE} = m_1 = \frac{1}{3}, \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{BC} = m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{AE} \text{ غير معرف} \quad \therefore \overrightarrow{AB} \text{ لا يوازي } \overrightarrow{CD} \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن : الشكل $ABCD$ شبه منحرف

$$(16) \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -\frac{2}{3}, \quad \therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{AB} = m_1 = -\frac{2}{3}, \quad \therefore \text{ميل } \overrightarrow{CD} = m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ومنها : س} = 1$$

$$(17) \quad [1] \text{ منفرجة} \quad [2] m_1 \times m_2 = 1 = -1 \quad [3] m_1 - m_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$[5] \frac{2}{3} \quad [6] \text{متعامدان} \quad [7] 40 \quad [8] 3 \quad [9] \frac{4}{3}$$

$$[10] 4 \quad [11] 3 \quad [12] \frac{1}{3} \quad [13] 3$$

الدرس الرابع : معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله

وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

$$(1) \quad [1] \text{ الميل} = \frac{4}{3}, \quad \text{المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات}$$

3 وحدات

[٢] الميل = $-\frac{1}{4}$ ، المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور
الصادات وحدتين

[٣] الميل = $\frac{5}{4}$ ، المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور
الصادات ٥ وحدات

[٤] الميل = $-\frac{1}{4}$ ، المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات
وحدتين

$$(1) \quad 3 = \text{ص} + 3 \text{ س} \quad [2] \quad \text{ص} = -\frac{1}{4} - 3 \text{ س}$$

[٣] $\text{ص} = \frac{5}{4} + 3 \text{ س}$ ، المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٥)

فهي تحقق معادلته $3 = \frac{5}{4} + 0 \times 3$

و منها : $1 = \text{ص}$: المعادلة هي $1 = \frac{5}{4} + 3 \text{ س}$

(٣) [1] المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، -١)

∴ ميله = -2 ، معادلته هي : $\text{ص} = -2 + 2 \text{ س}$

∴ (١ ، ١) تحقق المعادلة $1 = -2 + 1 \times 2$

و منها : $3 = \text{ص}$: المعادلة هي $3 = -2 + 2 \text{ س}$

[2] ميل المستقيم المعطى = $\frac{5}{4}$ ، المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{5}{4}$

، معادلته هي : $\text{ص} = \frac{5}{4} + 3 \text{ س}$

، المستقيم يمر بالنقطة (١ ، -٢)

$$\therefore \frac{5}{4} = \text{ص} + (1 - 3) \times \frac{5}{4} = \text{ص} \quad \text{و منها : } \frac{5}{4} = \text{ص}$$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي : $\text{ص} = \frac{5}{4} + 3 \text{ س}$

[٣] ميل المستقيم المعطى = 2 ، المستقيمان متعامدان

∴ ميل المستقيم المطلوب = $-\frac{1}{2}$

، معادلته هي : $\text{ص} = -\frac{1}{2} + 3 \text{ س}$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢)

$$\therefore 2 = -\frac{1}{2} + 1 \times 3 \quad \text{و منها : } \frac{5}{4} = \text{ص}$$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي : $\text{ص} = -\frac{1}{2} + 3 \text{ س}$

[4] المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية

قياسها 40° ∴ ميله = 1

، معادلته هي : $\text{ص} = 1 + 3 \text{ س}$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ $2 = 1 + 1 \times 3$ و منها : $1 = \text{ص}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي : $\text{ص} = 1 + 3 \text{ س}$

(4) إحداثي منتصف $\overline{AB} = (2, 4)$ ، ميل $\overline{AB} = 1$

∴ المستقيم المطلوب $\perp \overline{AB}$ ∴ ميل المستقيم المطلوب = -1

، معادلة المستقيم المطلوب هي : $\text{ص} = -1 + 3 \text{ س}$

∴ (٢ ، ٤) تحقق المعادلة $4 = -1 + 2 \times 3$

و منها : $7 = \text{ص}$ ∴ المعادلة هي : $7 = -1 + 3 \text{ س}$

(٥) إحداثي منتصف $\overline{b-d}$ و لتكن $(2, 2)$

ميل $\overline{a-e} = -\frac{4}{3}$ \therefore معادلة $\overline{a-e}$ هي : $v = -\frac{4}{3}h + 2$

\therefore $e(2, 2)$ تحقق المعادلة $\therefore 2 = -\frac{4}{3} \times 2 + 2$

و منها : $h = \frac{22}{7}$ \therefore المعادلة هي : $v = -\frac{4}{3}h + 2$

(٦) المستقيم يقطع Δ وحدات طولية من الجزء الموجب لمحور السينات

\therefore المستقيم يمر بالنقطة $m(0, 4)$ ، يكون : $h = 4$ وحدات

\therefore المستقيم يقطع ٩ وحدات طولية من الجزء الموجب لمحور الصادات

\therefore المستقيم يمر بالنقطة $b(9, 0)$ ، يكون : $h = 9$ وحدات

، ميله $= -\frac{4}{9}$ ، تكون معادلته هي : $v = -\frac{4}{9}h + 4$

، مساحة $\Delta p b d = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 = 18$ وحدة مربعة

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 9 = 18 \text{ وحدة مربعة}$$

(٧) معادلة المستقيم المعطى هي : $v = \frac{1}{3}h + 1$

\therefore ميله = ميل المستقيم المطلوب $= \frac{1}{3}$

\therefore معادلة المستقيم المطلوب هي : $v = \frac{1}{3}h - 3$

(٨) ميل $\overline{a-d} = -\frac{3}{5}$ ، $\therefore \overline{a-d} \perp \overline{b-e}$ \therefore ميل $\overline{b-e} = \frac{5}{3}$

\therefore معادلة $\overline{b-e}$ هي : $v = \frac{5}{3}h + 3$ (١)

، \therefore نقطة تقاطع القطرين $\therefore m$ منتصف $\overline{a-d}$

$\therefore m(3, 2)$ و هي تحقق معادلة $\overline{b-e}$

، بالتعويض في (١) ينتج : $h = 3$

\therefore معادلة $\overline{b-e}$ هي : $v = \frac{5}{3}h - 3$

(٩) (١) \therefore المستقيم يمر بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(3, 2)$

\therefore ميله $= 2$ \therefore معادلته هي : $v = 2h - 1$

، $\therefore (1, 1) \in$ للمستقيم $\therefore 1 = 2 \times 1 - 1$

و منها : $h = 1$

\therefore معادلة المستقيم هي : $v = 2h - 1$

(٢) وحدة واحدة من الجزء السالب لمحور الصادات

(٣) $\therefore (3, 0) \in$ للمستقيم $\therefore 0 = 2 \times 3 - 1$

(١٠) (١) $\frac{2}{3}$ (٢) 2 (٣) 3 (٤) 2 (٥) 3 (٦) $v = 2h - 1$

(٧) $v = 2h - 1$ (٨) 6 (٩) $v = 2h - 1$ (١٠) 20

(١٢) $v = 2h - 1$ (١٣) 7 (١٤) $\frac{2}{3}$

لأمانة العلمية

يرجى عدم حذف أسمى نهائياً

يسمح فقط بإعادة النشر

دون أي تعديل